

华中师范大学第一附属中学 2021 届高三押题卷

文科数学



本试题卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。扫码关注 查看答案

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知 M, N 为 \mathbf{R} 的两个不相等的非空子集,若 $(\complement_{\mathbf{R}} N) \subseteq (\complement_{\mathbf{R}} M)$, 则下列结论中正确的是
A. $\forall x \in N, x \in M$ B. $\exists x \in M, x \notin N$ C. $\exists x \notin N, x \in M$ D. $\forall x \in M, x \notin \complement_{\mathbf{R}} N$
- 已知抛物线 $y = mx^2 (m > 0)$ 上的点 $(x_0, 2)$ 到该抛物线焦点 F 的距离为 $\frac{17}{8}$, 则 $m =$
A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$
- 下列结论中,错误的是
A. “ $x=1$ ”是“ $x^2-x=0$ ”的充分不必要条件
B. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2+1 > 0$, 则 $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2+1 \leq 0$
C. 若复合命题 $p \wedge q$ 是假命题, 则 p, q 都是假命题
D. 命题“若 $x^2-x=0$, 则 $x=1$ ”的逆否命题“若 $x \neq 1$, 则 $x^2-x \neq 0$ ”
- 已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若存在 $m \in \mathbf{N}^*$, 满足 $\frac{S_{2m}}{S_m} = 9, \frac{a_{2m}}{a_m} = \frac{5m+1}{m-1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公比为
A. -2 B. 2 C. -3 D. 3
- 已知大气压强 $p = \frac{\text{压力}}{\text{受力面积}}$, 它的单位是“帕斯卡”(Pa, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$), 大气压强 p (Pa) 随海拔高度 h (m) 的变化规律是 $p = p_0 e^{-kh} (k = 0.000126)$, p_0 是海平面大气压强. 已知在某高山 A_1, A_2 两处测得的大气压强分别为 p_1, p_2 , 且 $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$, 那么 A_1, A_2 两处的海拔高度的差约为(参考数据: $\ln 2 \approx 0.693$)
A. 550m B. 1818m C. 5500m D. 8732m
- 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 60^\circ, AB = 4, AD = 3$, 且 $\vec{CP} = 3\vec{PD}$, 则 $\vec{AP} \cdot \vec{AB} =$
A. 5 B. 6 C. 7 D. 10
- 已知函数 $f(x) = \log_3(9^x + 1) - x$, 设 $a = f(\frac{1}{10}), b = f(-e^{-\frac{9}{10}}), c = f(\ln \frac{11}{10})$, 则 a, b, c 的大小关系为
A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $b < a < c$
- 斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线 l 经过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 F_1 , 交双曲线两条渐近线于 A, B 两点, F_2

为双曲线的右焦点且 $|AF_2| = |BF_2|$, 则双曲线的渐近线方程为

- A. $y = \pm x$ B. $y = \pm\sqrt{2}x$ C. $y = \pm 2x$ D. $y = \pm \frac{1}{2}x$

9. 已知复数 $z = \cos 140^\circ + i \sin 140^\circ$, i 为虚数单位, 则下列说法错误的是

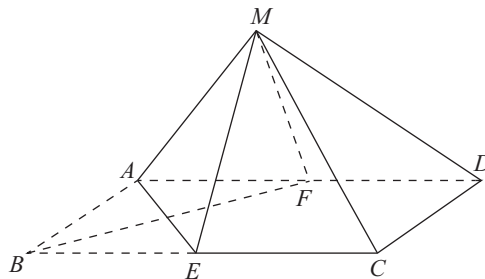
- A. z 的虚部为 $i \sin 140^\circ$ B. z 在复平面上对应的点位于第二象限
C. $z = \frac{1}{\bar{z}}$ D. $z^3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

10. 为庆祝中国共产党成立 100 周年, A, B, C, D 四个兴趣小组举行党史知识竞赛, 每个小组各派 10 名同学参赛, 记录每名同学失分(均为整数)情况, 若该组每名同学失分都不超过 7 分, 则该组为“优秀小组”, 已知 A, B, C, D 四个小组成员失分数据信息如下, 则一定为“优秀小组”的是

- A. A 组中位数为 2, 极差为 8 B. B 组平均数为 2, 众数为 2
C. C 组平均数为 1, 方差大于 0 D. D 组平均数为 2, 方差为 3

11. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 已知 $AB=2, BC=4, E$ 为 BC 的中点. 将 $\triangle ABE$ 沿着 AE 向上翻折至 $\triangle MAE$ 得到四棱锥 $M-AECD$, 平面 AEM 与平面 $AECD$ 所成锐二面角为 α , 直线 ME 与平面 $AECD$ 所成角为 β , 则下列说法错误的是

- A. 若 F 为 AD 中点, 则 $\triangle ABE$ 无论翻折到哪个位置都有平面 $AEM \perp$ 平面 MBF
B. 若 Q 为 MD 中点, 则 $\triangle ABE$ 无论翻折到哪个位置都有 $CQ \parallel$ 平面 AEM
C. $\sqrt{2} \sin \alpha = \sin \beta$
D. 存在某一翻折位置, 使 $\sqrt{2} \cos \alpha = \cos \beta$



12. 已知函数 $f(x) = |\sin x| + |\cos x| - \sin 2x - 1$, 则下列说法错误的是

- A. $f(x)$ 是以 π 为周期的函数
B. $x = \frac{\pi}{2}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称轴
C. 函数 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$, 最小值为 $\sqrt{2} - 2$
D. 若函数 $f(x)$ 在 $(0, M\pi)$ 上恰有 2021 个零点, 则 $\frac{2021}{2} < M \leq 1011$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 直线 $y = kx + \sqrt{3}$ 被圆 $(x-1)^2 + y^2 = 5$ 截得的弦长最小值是_____。
14. 写出一个定义在 \mathbf{R} 上且使得命题“若 $f'(1) = 0$, 则 1 为函数 $f(x)$ 的极值点”为假命题的函数 $f(x) =$ _____。
15. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的五个顶点都在球 O 的表面上, 若底面 $ABCD$ 是梯形, 且 $CD \parallel AB, AD = BC = CD = \frac{1}{2}AB = \sqrt{5}$, 则当球 O 的表面积最小时, 四棱锥 $P-ABCD$ 的高的最大值为_____。
16. 设 $a_n = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \dots + \frac{n^2}{2n-1}, b_n = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \dots + \frac{n^2}{2n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$, 记最接近 $a_n - b_n$ 的整数为 c_n , 则 $c_{505} =$ _____ ; $c_n =$ _____ . (用 n 表示)

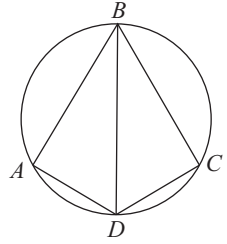
三、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分)

已知平面四边形 $ABCD$ 内接于圆 O , $AB=BC=3$, $\angle ABC=60^\circ$ 。

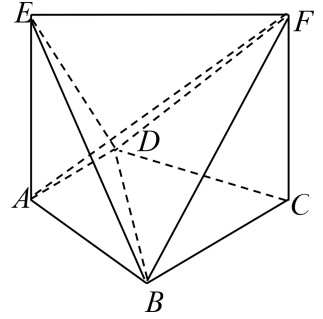
(1)若 $CD=\sqrt{3}$, 求 $\angle ABD$ 所对的圆弧 \widehat{AD} 的长;

(2)求四边形 $ABCD$ 面积的最大值。



18. (12 分)

七面体玩具是一种常见的儿童玩具. 在几何学中, 七面体是指由七个面组成的多面体, 常见的七面体有六角锥、五角柱、正三角锥柱、Szilassi 多面体等. 在拓扑学中, 共有 34 种拓扑结构明显差异的凸七面体, 它们可以看作是由一个长方体经过简单切割而得到的. 在如图所示的七面体 $EABCFD$ 中, $EA \perp$ 平面 $ABCD$, $EA \parallel FC$, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AD=AB=2$, $BC=FC=EA=4$.



(1)在该七面体中, 探究以下两个结论是否正确. 若正确, 给出证明; 若不正确, 请说明理由: ① $EF \parallel$ 平面 $ABCD$; ② $AF \perp$ 平面 EBD ;

(2)求该七面体的体积。

19. (12 分)

有一种击球比赛, 把从裁判发球哨响开始到之后裁判第一哨响止, 叫做一回合. 每一回合中, 发球队赢球后得分 1 分并在下一回合发球, 另一队得零分, 发球队输球后, 比赛双方均得零分, 下一回合由另一队发球. 甲乙两球队正在进行这种击球比赛, 从以往统计结果看, 每一回合, 甲乙两队输赢球的概率都相等.

(1)在连续三个回合中, 第一回合由甲队发球. 求甲队得 1 分的概率;

(2)比赛进入决胜局, 两队得分均为 25 分. 在接下来的比赛中, 甲队第一回合发球, 若甲乙两队某一队得分比对方得分多 2 分, 则比赛结束, 得分多的队获比赛胜利. 求甲队在第四回合获得比赛胜利的概率。

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x + a(x^2 - 2x)$ ($a > 0$).

(1)若 $a = \frac{1}{2}$, 求 $f(x)$ 的极值;

(2)若 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < \frac{1}{x} + \ln x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围。

21. (12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), F_1, F_2 分别是椭圆的左、右焦点, P 是椭圆上的动点, 直线 PF_1 交椭圆于另一点 M , 直线 PF_2 交椭圆于另一点 N , 当 P 为椭圆的上顶点时, 有 $|PM| = |MF_2|$.

(1)求椭圆 E 的离心率;

(2) 求 $\frac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}$ 的最大值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10 分)

已知圆 O_1 的圆心为 $(2, 1)$, 半径为 $\sqrt{5}$, 在以原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 圆 O_2 的方程为 $\rho = 2R \sin \theta$.

(1) 求圆 O_1 的极坐标方程;

(2) 若圆 O_1 与圆 O_2 的公共弦长为 $3\sqrt{2}$, 求圆 O_2 的极坐标方程.

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10 分)

已知 $f(x) = |2 - ax| - |x + 1|$.

(1) 若 $a = 1$, 解关于 x 的不等式 $f(x) \geq 1$;

(2) 若 $x \geq 1$ 时, $f(x) \leq x^2$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.