机密★启用前(全国卷理科数学)

华中师范大学第一附属中学 2021 届高考押题卷

理科数学参考答案和评分标准

扫码关注　查询答案

一、选择题:

1.【答案】D

【解析】由已知$(\complement_{\mathbf{R}}N)\subseteq(\complement_{\mathbf{R}}M)$得:$M\subseteq N$,得答案为 D.

2.【答案】B

【解析】点$(x_0,2)$到焦点 F 的距离等于到准线 $y=-\dfrac{1}{4m}$的距离,则 $2+\dfrac{1}{4m}=\dfrac{17}{8}$,解得 $m=2$.

3.【答案】C

【解析】$P=\dfrac{C_5^1C_4^2}{C_5^3C_5^3}=\dfrac{3}{10}$.

4.【答案】B

【解析】设数列$\{a_n\}$的公比为q,若 $q=1$,则$\dfrac{S_{2m}}{S_m}=2$,与题中条件矛盾,故 $q\neq1$.

$\because\dfrac{S_{2m}}{S_m}=\dfrac{\dfrac{a_1(1-q^{2m})}{1-q}}{\dfrac{a_1(1-q^m)}{1-q}}=q^m+1=9$,$\therefore q^m=8$. $\because\dfrac{a_{2m}}{a_m}=\dfrac{a_1q^{2m-1}}{a_1q^{m-1}}=q^m=8=\dfrac{5m+1}{m-1}$,$\therefore m=3$,$\therefore q^3=8$,$\therefore q=2$. 故选 B.

5.【答案】C

【解析】设 A_1,A_2 两处的海拔高度分别为 h_1,h_2,则$\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{p_0e^{-kh_1}}{p_0e^{-kh_2}}=e^{k(h_2-h_1)}$,

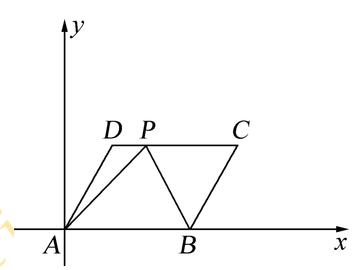
$\therefore h_2-h_1=\dfrac{-\ln2}{0.000126}\approx\dfrac{-0.693}{0.000126}=-5500\text{m}$.

6.【答案】D

【解析】方法一:由题知$\overrightarrow{DP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{DC}$,则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DP}=$

$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos60^\circ+\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2=4\times3\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times16=10$. 故选 D.

方法二:如图,以 A 为原点,AB 所在直线为 x 轴,过点 A 且垂直于 AB 的直线为 y 轴,建立直角坐标系,则 $A(0,0)$,$B(4,0)$,$D\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt3}{2}\right)$,$\because\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$,$\therefore|\overrightarrow{DP}|=1$,$\therefore P\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3\sqrt3}{2}\right)$,$\therefore\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3\sqrt3}{2}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(4,0)$,$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{5}{2}\times4+\dfrac{3\sqrt3}{2}\times0=10$. 故选 D.



7.【答案】C

【解析】$\because f(x)=\log_3(9^x+1)-x=\log_3(3^x+3^{-x})$,$\therefore f(x)$为偶函数且在$(0,+\infty)$上为增函数,

则 $b=f(-e^{-\frac{9}{10}})=f(e^{-\frac{9}{10}})$,$\because e^x-x-1\geqslant0$(当且仅当 $x=0$ 时取等号),$\therefore e^x>x+1(x\neq0)$,

故 $e^{-\frac{9}{10}}>-\dfrac{9}{10}+1=\dfrac{1}{10}$,即 $b>a$;$\because\ln x-x+1\leqslant0$(当且仅当 $x=1$ 时取等号),

∴$\ln x<x-1(x\neq 1)$，∴$\ln\frac{11}{10}<\frac{11}{10}-1=\frac{1}{10}$，∴$a>c$. 综上 $b>a>c$. 故选 C.

8.【答案】D

【解析】设 AB 的中点为 M，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，则$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=0\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=0\end{cases}$，∴$\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}-\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，则 $k_{AB}\cdot k_{OM}=\dfrac{b^2}{a^2}$，∴$k_{OM}=\dfrac{3b^2}{a^2}$，设直线 AB 的倾斜角为 θ，∵$|AF_2|=|BF_2|$，

∴$AB\perp MF_2$，∴$|OM|=|OF_1|=|OF_2|$，则 OM 的斜率为 $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\times\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=\dfrac{3}{4}$，∴$\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{4}$，

∴双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，故选 D.

9.【答案】A

【解析】由虚部概念知 A 错误；由 $\cos 140^\circ<0$，$\sin 140^\circ>0$，B 正确；由 $z\cdot\bar{z}=|z|^2=1$，C 正确；

∵$z^2=\cos^2 140^\circ-\sin^2 140^\circ+2\mathrm{i}\sin 140^\circ\cos 140^\circ=\cos 280^\circ+\mathrm{i}\sin 280^\circ$，

∴$z^3=z^2\cdot z=\cos 420^\circ+\mathrm{i}\sin 420^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，D 正确.

10.【答案】D

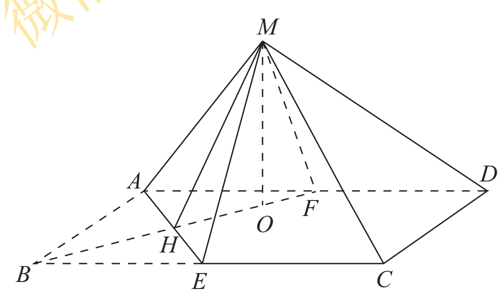
【解析】对 A，因为中位数为 2，极差为 8，故最大值大于 7. 故 A 错误；

对 B，失分数据分别为 0,0,0,2,2,2,2,2,2,8，则满足平均数为 2，众数为 2，但不满足每名同学失分都不超过 7 分，故 B 错误；

对 C，失分数据分别为 0,0,0,0,0,0,0,0,1,9，则满足平均数为 1，方差大于 0，但不满足每名同学失分都不超过 7 分，故 C 错误；

对 D，利用反证法，假设有一同学失分超过 7 分，则方差大于$\frac{1}{10}\times(8-2)^2=3.6>3$. 与题设矛盾，故每名同学失分都不超过 7 分. 故 D 正确.

11.【答案】C



【解析】若 F 为 AD 中点，连接 BF 交 AE 于点 H，则 $AE\perp$ 面 MBF，又 $AE\subset$ 面 MAE，所以平面 $AEM\perp$ 平面 MBF，A 正确；

取 AM 中点 P，则 $PQ\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}AD$，又 $CE\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}AD$，∴$PQ\mathrel{\underline{\parallel}}CE$，

∴$CQ\parallel EP$，B 正确；

过 M 作 $MO\perp$平面 $AECD$，则 O 在 BF 上，所以平面 AEM 与平面 $AECD$ 所成锐二面角为$\angle MHB$（或其补角），∴$\sin\alpha=\dfrac{MO}{MH}$，$\sin\beta=\dfrac{MO}{ME}=\dfrac{MO}{\sqrt{2}MH}$，∴$\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta$，C 错误；

若$\sqrt{2}\cos\alpha=\cos\beta$，又 $\cos\alpha=\dfrac{OH}{MH}$，$\cos\beta=\dfrac{OE}{ME}=\dfrac{OE}{\sqrt{2}MH}$，则 $OE=2OH$，D 正确

12.【答案】B

【解析】因为 $f(x+\pi)=f(x)$，所以 $f(x)$是以 π 为周期的函数，A 正确；

又 $f(\pi-x)=|\sin x|+|\cos x|+\sin 2x-1\neq f(x)$，B 错误；

由 A 知只需考虑 $f(x)$在$[0,\pi]$上的最大值.

①当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，则 $t\in[1,\sqrt{2}]$，$f(x)=-t^2+t=u(t)$，易知 $u(t)$在区间$[1,\sqrt{2}]$上单调递减，所以，$f(x)$的最大值为 $u(1)=0$，最小值为 $u(\sqrt{2})=\sqrt{2}-2$.

②当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$时，令 $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$，则 $t\in[1,\sqrt{2}]$，$f(x)=t^2+t-2=v(t)$，易知 $v(t)$在区间$[1,\sqrt{2}]$上单调递增，所以，$f(x)$的最大值为 $v(\sqrt{2})=\sqrt{2}$，最小值为 $v(1)=0$.

综合可知：函数 $f(x)$的最大值为$\sqrt{2}$，最小值为$\sqrt{2}-2$，C 正确；

因为 $f(x)$是以 π 为周期的函数，可以先研究函数 $f(x)$在$(0,\pi]$上的零点个数，易知 $f(\pi)=0$.

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$时，令 $f(x)=u(t)=-t^2+t=0$，解得 $t=0$ 或 1，

$t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=0$ 在$(0,\frac{\pi}{2}]$上无解，$t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$ 在$(0,\frac{\pi}{2}]$上仅有一解 $x=\frac{\pi}{2}$.

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，令 $f(x)=v(t)=t^2+t-2=0$，解得 $t=-2$ 或 1.

$t=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=-2$ 在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上无解，$t=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=1$ 在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上也无解.

综合可知：函数 $f(x)$在$(0,\pi]$上有两个零点，分别为 $x=\frac{\pi}{2}$和 $x=\pi$.

又因为 $f(x)$是以 π 为周期的函数，所以，若 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $f(x)$在$(0,n\pi]$上恰有 $2n$ 个零点.

又已知函数 $f(x)$在$(0,M\pi)$上恰有 2021 个零点，所以$\frac{2021}{2}<M\leqslant 1011$，D 正确.

二、填空题

13.【答案】5

【解析】由已知 $n=16$，展开式通项 $T_{r+1}=C_n^r(\sqrt{x})^{n-r}(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}})^r=C_n^r(\frac{1}{2})^r x^{\frac{n}{2}-\frac{3r}{4}}$，则 $r=0,4,8,12,16$ 共 5 项.

14.【答案】$(x-1)^3$（答案不唯一）

15.【答案】$\sqrt{5}$

【解析】球心在平面 $ABCD$ 上射影落在四边形 $ABCD$ 外接圆圆心处（即 AB 中点），设球心 O 到平面 $ABCD$ 的距离为 d，则由 $R^2=d^2+\frac{1}{4}AB^2=d^2+5\geqslant 5$ 得，外接球半径最小值为$\sqrt{5}$，当 $PO\perp$面 $ABCD$ 时，高最大为$\sqrt{5}$.

16.【答案】253；$\begin{cases}\frac{n}{2} & n\text{ 为偶数}\\ \frac{n+1}{2} & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

【解析】$a_{505}=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\cdots\frac{505^2}{1009}$，$b_{505}=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\cdots+\frac{504^2}{1009}+\frac{505^2}{1011}$，

$\therefore a_{505}-b_{505}=1+\frac{2^2-1^2}{3}+\frac{3^2-2^2}{5}+\cdots+\frac{505^2-504^2}{1009}-\frac{505^2}{1011}=505-\frac{505^2}{1011}=\frac{505\times 506}{505+506}$

$\therefore \frac{2}{506}<\frac{1}{a_{505}-b_{505}}=\frac{1}{505}+\frac{1}{506}<\frac{2}{505}$

$\therefore 252.5<a_{505}-b_{505}<253$

$\therefore c_{505}=253$.

$a_n-b_n=n-\frac{n^2}{2n+1}=\frac{n^2+n}{2n+1}$

$\therefore \frac{1}{a_n-b_n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\in\left(\frac{2}{n+1},\frac{2}{n}\right)$

$\therefore \frac{n}{2}<a_n-b_n<\frac{n+1}{2}$

若 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $c_n=k=\frac{n}{2}$，

若 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $c_n=k+1=\frac{n+1}{2}$，

$\therefore c_n=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\text{ 为偶数}\\ \frac{n+1}{2} & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

三、解答题

17.【解析】

(1)连接 AC，$AB=BC=3$，$\angle ABC=60°$，$\therefore AC=3$ ……………………………………………………（1 分）

又 $\angle ADC=120°$，在 $\triangle ACD$ 中由余弦定理，$\cos120°=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$，即 $-\frac{1}{2}=\frac{AD^2-6}{2\sqrt{3}AD}$，$\therefore AD=\sqrt{3}$

……………………………………………………………………………………………………（3 分）

又 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R=\frac{AC}{2\sin60°}=\sqrt{3}$ ……………………………………………………（4 分）

$\therefore \triangle OAD$ 为正三角形，$\angle AOD=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \angle ABD$ 所对的圆弧 $\overset{\frown}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$. ……………………………………………………（6 分）

(2)在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理 $\cos\angle ADC=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$

即 $AD^2+CD^2+AD\cdot CD=9$，……………………………………………………（8 分）

又 $AD^2+CD^2\geqslant 2AD\cdot CD$，$\therefore 9-AD\cdot CD\geqslant 2AD\cdot CD$

$\therefore AD\cdot CD\leqslant 3$ 当且仅当 $AD=CD=\sqrt{3}$ 时等号成立 ……………………………………（10 分）

$\therefore S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin60°+\frac{1}{2}AD\cdot DC\cdot\sin120°\leqslant\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，

所以四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $3\sqrt{3}$. ……………………………………………………（12 分）

18.【解析】

(1)结论①正确，结论②错误，理由如下：……………………………………………………（1 分）

对于结论①，因为 $EA//FC$ 且 $FC=EA=4$，连接 AC，所以四边形 $EACF$ 是平行四边形，

所以 $EF//AC$，因为 $EF\not\subset$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore EF//$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ 结论①正确 ……………………………………………………（3 分）

对于结论②，若 $AF\perp$ 平面 EBD，则 $AF\perp BD$，

因为 $EA\perp$ 平面 $ABCD$，$EA//FC$，所以 $FC\perp$ 平面 $ABCD$，

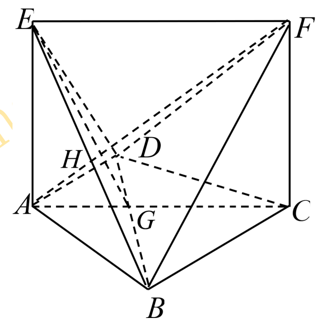
所以 $FC\perp BD$，又因为 $AF\cap FC=F$，所以 $BD\perp$ 平面 AFC，

所以 $BD\perp AC$，而在梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$AD\perp AB$，

$AD=AB=2$，$BC=4$，所以 $CD=2\sqrt{2}\neq BC$，与 $BD\perp AC$ 矛盾

所以结论②错误. ……………………………………………………（6 分）

(2)方法一:连接 AC,交 BD 于点 G,连接 EG,则在平面 $EACF$ 中,AF 与 EG 相交,设交点为 H,则由 $AC//EF$ 可得:$\dfrac{AG}{EF}=\dfrac{AH}{HF}$,又∵$\dfrac{AG}{EF}=\dfrac{AG}{AC}=\dfrac{AD}{AD+BC}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$,



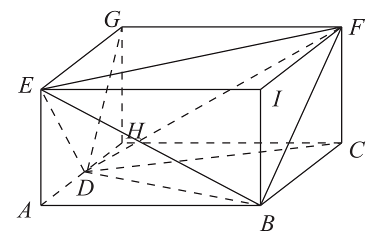
∴$\dfrac{AH}{HF}=\dfrac{1}{3}$,

该七面体的体积等于 $V_{E-ABD}+V_{F-BED}+V_{F-BCD}$

$=V_{E-ABD}+3V_{A-BED}+2V_{E-ABD}=6V_{E-ABD}$

$=6\times\dfrac{1}{3}\times4\times\dfrac{1}{2}\times2\times2=16$. ……………………………………………… (12 分)

方法二:将该七面体补成如图所示的长方体;



$V_{ABCH-EIFG}-V_{B-EFI}-V_{F-BGD}-V_{D-FCHG}=2\times4\times4-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times4\times4-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times4\times4\times2-\dfrac{1}{3}\times4\times2\times2=32-\dfrac{16}{3}-\dfrac{16}{3}-\dfrac{16}{3}=16$

方法三:建立空间直角坐标系,利用空间向量求点 F 到平面 BED 的距离后求三棱锥 $F-BED$ 的体积.(参照给分)

19.【解析】

(1)

	不太熟悉	比较熟悉	合计
男性	120	80	200
女性	140	160	300
合计	260	240	500

……………………… (2 分)

∴$K^2=\dfrac{500(120\times160-140\times80)^2}{260\times240\times200\times300}\approx8.547>6.635$.

∴有 99%的把握认为该企业员工对消防知识的了解程度与性别有关. ……………………………… (5 分)

(2)A、B 在一轮比赛中积 1 分的概率为:

$P=C_2^1P_1(1-P_1)C_2^2(P_2)^2+C_2^2(P_1)^2C_2^1P_2(1-P_2)+C_2^2(P_1)^2C_2^2(P_2)^2$

$=2P_1P_2(P_1+P_2)-3(P_1P_2)^2$, ………………………………………………………………… (7 分)

又∵$P_1+P_2=1$,$0\leqslant P_2\leqslant1$,则 $P_1P_2=(1-P_2)P_2\in\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$

∴$P=2P_1P_2-3(P_1P_2)^2=-3\left(P_1P_2-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}$,且 $0\leqslant P_1P_2\leqslant\dfrac{1}{4}$, …………………………… (8 分)

∴$P_{\max}=\dfrac{5}{16}$,此时 $P_1P_2=\dfrac{1}{4}$, ……………………………………………………………… (10 分)

设 A、B 所在的小组在 n 轮比赛中的积分为 ξ,则 $\xi\sim B(n,p)$,

∴$E\xi=\dfrac{5}{16}n\geqslant5$,∴$n\geqslant16$,所以理论上至少要进行 16 轮比赛. ……………………………… (12 分)

20.【解析】

(1)$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$,$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+2mx$, ……………………………………… (1 分)

∴$f'(1)=\dfrac{1}{2}+2m=\dfrac{13}{2}$, ∴$m=3$, ……………………………………………………………… (2 分)

∴$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+6x=\dfrac{6x^2+6x+1}{x+1}$,

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{-3-\sqrt{3}}{6}>-1$，$x_2=\frac{-3+\sqrt{3}}{6}$，

令 $f'(x)>0$，得 $-1<x<x_1$ 或 $x>x_2$；令 $f'(x)<0$，得 $x_1<x<x_2$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，在 (x_1,x_2) 上单调递减，

即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-1,\frac{-3-\sqrt{3}}{6}\right)$ 和 $\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{6},+\infty\right)$，

单调递减区间为 $\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{6},\frac{-3+\sqrt{3}}{6}\right)$. ……………………………………………（6 分）

（2）由题意知 $g(x)=\ln(x+1)+mx^2-\sin x$，$g(0)=0$，$g'(x)=\frac{1}{1+x}+2mx-\cos x$，$g'(0)=0$，

令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=2m-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x$，$h'(0)=2m-1$ ……………………………（7 分）

若 $0<m<\frac{1}{2}$，因为当 $x\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$y=-\frac{1}{(1+x)^2}$ 单调递增，所以 $h'(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

又因为 $h'(0)=2m-1<0$，$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2m+1-\frac{1}{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2}>0$，

因此存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $h'(x_0)=0$，

所以当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$h'(x)<h'(x_0)=0$，$g'(x)=h(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 上单调递减，又 $g'(0)=h(0)=0$，

所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,x_0)$ 上单调递减，符合题意. ……………………………（10 分）

若 $m\geqslant\frac{1}{2}$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h'(x)=2m-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x\geqslant 1-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x>0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，$g'(x)>g'(0)=0$，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，因此 $x=0$ 不可能是 $g(x)$ 的极大值点. ……………………………………………………………………（11 分）

综上，当 $x=0$ 是 $g(x)$ 的极大值点时，m 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. ………………………（12 分）

21.【解析】

（1）当 P 为椭圆 E 的上顶点时，$|PF_1|=a$，$\therefore |MF_2|=|PM|=|MF_1|+a$，

又因为 $|MF_1|+|MF_2|=2a$，$\therefore |MF_1|=\frac{a}{2}$，$|PM|=|MF_2|=\frac{3a}{2}$，

所以 $\cos\angle MPN=\frac{PM^2+PF_2^2-MF_2^2}{2PM\cdot PF_2}=\frac{\left(\frac{3}{2}a\right)^2+a^2-\left(\frac{3}{2}a\right)^2}{2\cdot\frac{3}{2}a\cdot a}=\frac{1}{3}$，

所以 $\cos\angle MPN=1-2\sin^2\angle MPO=\frac{1}{3}$，$\therefore \sin\angle MPO=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore e=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………………………（5 分）

（2）方法一：设 $P(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1M}$，$\overrightarrow{PF_2}=\mu\overrightarrow{F_2N}$，$(\lambda,\mu>0)$

$\therefore(-c-x_0,-y_0)=\lambda(x_1+c,y_1)$，$(c-x_0,-y_0)=\mu(x_2-c,y_2)$，

$\therefore x_1=-\left(\frac{x_0+c}{\lambda}+c\right)$，$y_1=-\frac{y_0}{\lambda}$，

又∵点 P 在椭圆上，则 $\dfrac{\left(\dfrac{x_0+c}{\lambda}+c\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(\dfrac{y_0}{\lambda}\right)^2}{b^2}=1$，

$\therefore\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}\right)+\dfrac{2c(1+\lambda)x_0+c^2(1+\lambda)^2}{a^2}=\lambda^2$，又 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，

$\therefore 2c(1+\lambda)x_0+c^2(1+\lambda)^2=(\lambda^2-1)a^2=3c^2(\lambda^2-1)$，

$\therefore\lambda=\dfrac{x_0+2c}{c}$，同理 $\mu=\dfrac{x_0-2c}{-c}=\dfrac{2c-x_0}{c}$（用“$-c$”代替“$c$”），

$\therefore\lambda+\mu=4$， ………………………………………………………………………………（10 分）

$\therefore\dfrac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}=\dfrac{|PF_1|\cdot|PF_2|}{|PM|\cdot|PN|}=\dfrac{\lambda\mu}{(\lambda+1)(\mu+1)}=\dfrac{\lambda\mu}{\lambda\mu+5}=\dfrac{1}{1+\dfrac{5}{\lambda\mu}}$，

又 $\lambda+\mu\geqslant 2\sqrt{\lambda\mu}$，$\therefore\lambda\mu\leqslant 4$，所以 $\dfrac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}$ 的最大值为 $\dfrac{4}{9}$. ………………………………………（12 分）

方法二：设 $P(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1M}$，$\overrightarrow{PF_2}=\mu\overrightarrow{F_2N}$，

$\therefore\begin{cases}x_0+\lambda x_1=-c(1+\lambda)\\ y_0+\lambda y_1=0\end{cases}$，$\begin{cases}x_0+\mu x_2=c(1+\mu)\\ y_0+\mu y_2=0\end{cases}$，

由 $\begin{cases}2x_0^2+3y_0^2=3b^2\\ 2x_1^2+3y_1^2=3b^2\end{cases}$，得 $2x_0^2+3y_0^2-\lambda^2(2x_1^2+3y_1^2)=3b^2(1-\lambda^2)$，

即 $2(x_0+\lambda x_1)(x_0-\lambda x_1)+3(y_0+\lambda y_1)(y_0-\lambda y_1)=3b^2(1-\lambda^2)$，

$\therefore 2(-c-\lambda c)(x_0-\lambda x_1)=3b^2(1-\lambda^2)$，即 $x_0-\lambda x_1=\dfrac{3b}{\sqrt{2}}(\lambda-1)$，同理 $x_0-\lambda x_2=\dfrac{3b}{\sqrt{2}}(1-\mu)$，

$\therefore\lambda x_1-\mu x_2=\dfrac{3b}{\sqrt{2}}(1-\mu)+\dfrac{3b}{\sqrt{2}}(1-\lambda)=3c(2-\lambda-\mu)$，

又∵ $\lambda x_1-\mu x_2=-c(1+\lambda)-c(1+\mu)=c(-2-\lambda-\mu)$，

$\therefore c(-2-\lambda-\mu)=3c(2-\lambda-\mu)$，$\therefore\lambda+\mu=4$，以下同解法一.

22.【解析】(1) 根据条件，圆 O_1 的标准直角坐标方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$，将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入该方程并化简得圆 O_1 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$. ………………………………………………… 4 分

(2) ∵圆 O_2 的极坐标方程为 $\rho=2R\sin\theta$，∴圆 O_1 和圆 O_2 都经过极点 O，设圆 O_1 和圆 O_2 另一个交点的为 (ρ,θ)，则 ρ,θ 满足方程组：

$\begin{cases}\rho=4\cos\theta+2\sin\theta,\\ \rho=2R\sin\theta.\end{cases}$ ………………………………………………………………………… 6 分

由题意得，$\begin{cases}3\sqrt{2}=4\cos\theta+2\sin\theta,\\ 3\sqrt{2}=2R\sin\theta.\end{cases}$ 解得 $\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{2}}{2R}$，$\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}-\dfrac{3\sqrt{2}}{4R}$，

由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 得，$\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}-\dfrac{3\sqrt{2}}{4R}\right)^2=1$，解得，$R=3$，或 $R=15$. ………………… 9 分

所以，圆 O_2 的极坐标方程是 $\rho=6\sin\theta$，或 $\rho=30\sin\theta$. …………………………………… 10 分

23.【解析】(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=\begin{cases}3, x<-1,\\ -2x+1, -1\leqslant x\leqslant 2,\\ -3, x>2.\end{cases}$ ………………………………………… 1 分

当 $x<-1$ 时，由 $f(x)\geqslant 1$ 得，$x<-1$. ……………………………………………………… 2 分

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，由 $f(x)\geqslant 1$ 得，$-2x+1\geqslant 1$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 0$. ………………………… 3 分

当 $x>2$ 时，由 $f(x)\geqslant 1$ 得，$-3\geqslant 1$，不等式 $f(x)\geqslant 1$ 解集为 $\varnothing$. ………………………… 4 分

综上所述,不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集为 $(-\infty,0]$. ………………………………………… 5 分

(2) $\because x\geqslant 1$, $\therefore f(x)=|2-ax|-x-1$. ………………………………………… 6 分

由 $f(x)\leqslant x^2$ 得, $|2-ax|-x-1\leqslant x^2$, 即 $|2-ax|\leqslant x^2+x+1$,

$\therefore -x^2-x-1\leqslant 2-ax\leqslant x^2+x+1$, ………………………………………… 7 分

$\therefore \begin{cases} ax\geqslant -x^2-x+1, \\ ax\leqslant x^2+x+3. \end{cases}$ 在 $x\geqslant 1$ 时恒成立, 即 $\begin{cases} a\geqslant -x+\dfrac{1}{x}-1, \\ a\leqslant x+\dfrac{3}{x}+1. \end{cases}$ 在 $x\geqslant 1$ 时恒成立. ……………………… 8 分

由于 $x\geqslant 1$ 时, $y=-x+\dfrac{1}{x}-1$ 是减函数, 最大值为 -1, $x+\dfrac{3}{x}+1\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{3}{x}}+1=2\sqrt{3}+1$, 等号在 $x=\sqrt{3}$ 时成立, 所以, 实数 a 的取值范围是 $[-1,2\sqrt{3}+1]$. ………………………………………… 10 分