机密★启用前(全国卷文科数学)

华中师范大学第一附属中学 2021 届高考押题卷

文科数学参考答案和评分标准

扫码关注　查询答案

一、选择题:

1.【答案】D

【解析】由已知$(\complement_{R}N)\subseteq(\complement_{R}M)$得:$M\subseteq N$,得答案为 D.

2.【答案】B

【解析】点$(x_0,2)$到焦点 F 的距离等于到准线 $y=-\dfrac{1}{4m}$的距离,则 $2+\dfrac{1}{4m}=\dfrac{17}{8}$,解得 $m=2$.

3.【答案】C

【解析】当 $x=1$ 时,$x^2-x=0$,∴A 正确;结论 B,D 都是可以直接判断为正确的.复合命题 $p\wedge q$ 假,只需 p,q 之一假就可以了,所以 C 错误.

4.【答案】B

【解析】设数列$\{a_n\}$的公比为 q,若 $q=1$,则$\dfrac{S_{2m}}{S_m}=2$,与题中条件矛盾,故 $q\neq1$.

$\because \dfrac{S_{2m}}{S_m}=\dfrac{\dfrac{a_1(1-q^{2m})}{1-q}}{\dfrac{a_1(1-q^m)}{1-q}}=q^m+1=9$,$\therefore q^m=8$. $\because \dfrac{a_{2m}}{a_m}=\dfrac{a_1q^{2m-1}}{a_1q^{m-1}}=q^m=8=\dfrac{5m+1}{m-1}$,$\therefore m=3$,$\therefore q^3=8$,$\therefore q=2$.故选 B.

5.【答案】C

【解析】设 A_1,A_2 两处的海拔高度分别为 h_1,h_2,则$\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{p_0e^{-kh_1}}{p_0e^{-kh_2}}=e^{k(h_2-h_1)}$,

$\therefore h_2-h_1=\dfrac{-\ln2}{0.000126}\approx\dfrac{-0.693}{0.000126}=-5500\text{m}$.

6.【答案】D

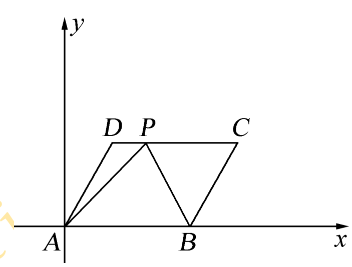
【解析】方法一:由题知$\overrightarrow{DP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{DC}$,则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DP}=$

$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos60°+\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2=4\times3\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times16=10$.故选 D.

方法二:如图,以 A 为原点,AB 所在直线为 x 轴,过点 A 且垂直于 AB 的直线为 y 轴,建立直角坐标系,则 $A(0,0)$,$B(4,0)$,$D\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\because \overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$,$\therefore|\overrightarrow{DP}|=1$,$\therefore P\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,$\therefore\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(4,0)$,

$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{5}{2}\times4+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times0=10$.故选 D.



7.【答案】C

【解析】$\because f(x)=\log_3(9^x+1)-x=\log_3(3^x+3^{-x})$,$\therefore f(x)$为偶函数且在$(0,+\infty)$上为增函数,

则 $b=f(-e^{-\frac{9}{10}})=f(e^{-\frac{9}{10}})$,$\because e^x-x-1\geqslant0$(当且仅当 $x=0$ 时取等号),$\therefore e^x>x+1(x\neq0)$,

故 $e^{-\frac{9}{10}}>-\dfrac{9}{10}+1=\dfrac{1}{10}$,即 $b>a$;$\because \ln x-x+1\leqslant0$(当且仅当 $x=1$ 时取等号),

∴$\ln x<x-1(x\neq1)$，∴$\ln\frac{11}{10}<\frac{11}{10}-1=\frac{1}{10}$，∴$a>c$. 综上 $b>a>c$. 故选 C.

8.【答案】D

【解析】设 AB 的中点为 M，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=0\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=0\end{cases}$，∴$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，则 $k_{AB}\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}$，∴$k_{OM}=\frac{3b^2}{a^2}$，设直线 AB 的倾斜角为 θ，∵$|AF_2|=|BF_2|$，

∴$AB\perp MF_2$，∴$|OM|=|OF_1|=|OF_2|$，则 OM 的斜率为 $\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{3}{4}$，∴$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，

∴双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，故选 D.

9.【答案】A

【解析】由虚部概念知 A 错误；由 $\cos140°<0$，$\sin140°>0$，B 正确；由 $z\cdot\bar{z}=|z|^2=1$，C 正确；

∵$z^2=\cos^2 140°-\sin^2 140°+2i\sin140°\cos140°=\cos280°+i\sin280°$，

∴$z^3=z^2\cdot z=\cos420°+i\sin420°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，D 正确.

10.【答案】D

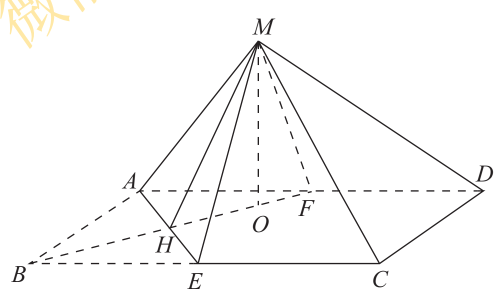
【解析】对 A，因为中位数为 2，极差为 8，故最大值大于 7. 故 A 错误；

对 B，失分数据分别为 0,0,0,2,2,2,2,2,2,8，则满足平均数为 2，众数为 2，但不满足每名同学失分都不超过 7 分，故 B 错误；

对 C，失分数据分别为 0,0,0,0,0,0,0,0,1,9，则满足平均数为 1，方差大于 0，但不满足每名同学失分都不超过 7 分，故 C 错误；

对 D，利用反证法，假设有一同学失分超过 7 分，则方差大于$\frac{1}{10}\times(8-2)^2=3.6>3$. 与题设矛盾，故每名同学失分都不超过 7 分. 故 D 正确.

11.【答案】C



【解析】若 F 为 AD 中点，连接 BF 交 AE 于点 H，则 $AE\perp$面 MBF，又 $AE\subset$面 MAE，所以平面 $AEM\perp$平面 MBF，A 正确；

取 AM 中点 P，则 $PQ\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}AD$，又 $CE\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}AD$，∴$PQ\mathrel{\underline{\parallel}}CE$，

∴$CQ/\!/EP$，B 正确；

过 M 作 $MO\perp$平面 $AECD$，则 O 在 BF 上，所以平面 AEM 与平面 $AECD$ 所成锐二面角为$\angle MHB$（或其补角），∴$\sin\alpha=\frac{MO}{MH}$，$\sin\beta=\frac{MO}{ME}=\frac{MO}{\sqrt{2}MH}$，∴$\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta$，C 错误；

若$\sqrt{2}\cos\alpha=\cos\beta$，又 $\cos\alpha=\frac{OH}{MH}$，$\cos\beta=\frac{OE}{ME}=\frac{OE}{\sqrt{2}MH}$，则 $OE=2OH$，D 正确

12.【答案】B

【解析】因为 $f(x+\pi)=f(x)$，所以 $f(x)$是以 π 为周期的函数，A 正确；

又 $f(\pi-x)=|\sin x|+|\cos x|+\sin2x-1\neq f(x)$，B 错误；

由 A 知只需考虑 $f(x)$在$[0,\pi]$上的最大值.

①当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，则 $t\in[1,\sqrt{2}]$，$f(x)=-t^2+t=u(t)$，易知 $u(t)$在区间$[1,\sqrt{2}]$上单调递减，所以，$f(x)$的最大值为 $u(1)=0$，最小值为 $u(\sqrt{2})=\sqrt{2}-2$.

②当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$时，令 $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$，则 $t\in[1,\sqrt{2}]$，$f(x)=t^2+t-2=v(t)$，易知 $v(t)$在区间$[1,\sqrt{2}]$上单调递增，所以，$f(x)$的最大值为 $v(\sqrt{2})=\sqrt{2}$，最小值为 $v(1)=0$.

综合可知：函数 $f(x)$的最大值为$\sqrt{2}$，最小值为$\sqrt{2}-2$，C 正确；

因为 $f(x)$是以 π 为周期的函数，可以先研究函数 $f(x)$在$(0,\pi]$上的零点个数，易知 $f(\pi)=0$.

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$时，令 $f(x)=u(t)=-t^2+t=0$，解得 $t=0$ 或 1，

$t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=0$ 在$(0,\frac{\pi}{2}]$上无解，$t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$ 在$(0,\frac{\pi}{2}]$上仅有一解 $x=\frac{\pi}{2}$.

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，令 $f(x)=v(t)=t^2+t-2=0$，解得 $t=-2$ 或 1.

$t=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=-2$ 在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上无解，$t=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=1$ 在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上也无解.

综合可知：函数 $f(x)$在$(0,\pi]$上有两个零点，分别为 $x=\frac{\pi}{2}$和 $x=\pi$.

又因为 $f(x)$是以 π 为周期的函数，所以，若 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $f(x)$在$(0,n\pi]$上恰有 $2n$ 个零点.

又已知函数 $f(x)$在$(0,M\pi)$上恰有 2021 个零点，所以$\frac{2021}{2}<M\leqslant1011$，D 正确.

二、填空题

13.【答案】2

【解析】直线 $y=kx+\sqrt{3}$经过定点 $A(0,\sqrt{3})$，定点 A 在圆内，圆心 $B(1,0)$到直线 $y=kx+\sqrt{3}$的最大距离为$|AB|=2$，所以，所求弦长的最小值为 $2\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=2$.

14.【答案】$(x-1)^3$（答案不唯一）

15.【答案】$\sqrt{5}$

【解析】球心在平面 $ABCD$ 上射影落在四边形 $ABCD$ 外接圆圆心处（即 AB 中点），设球心 O 到平面 $ABCD$ 的距离为 d，则由 $R^2=d^2+\frac{1}{4}AB^2=d^2+5\geqslant5$ 得，外接球半径最小值为$\sqrt{5}$，当 $PO\perp$面 $ABCD$ 时，高最大为$\sqrt{5}$.

16.【答案】253；$\begin{cases}\frac{n}{2} & n\text{ 为偶数}\\ \frac{n+1}{2} & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

【解析】$a_{505}=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\cdots\frac{505^2}{1009}$，$b_{505}=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\cdots+\frac{504^2}{1009}+\frac{505^2}{1011}$，

$\therefore a_{505}-b_{505}=1+\frac{2^2-1^2}{3}+\frac{3^2-2^2}{5}+\cdots+\frac{505^2-504^2}{1009}-\frac{505^2}{1011}=505-\frac{505^2}{1011}=\frac{505\times506}{505+506}$

$\therefore\frac{2}{506}<\frac{1}{a_{505}-b_{505}}=\frac{1}{505}+\frac{1}{506}<\frac{2}{505}$

$\therefore 252.5<a_{505}-b_{505}<253$

$\therefore c_{505}=253$.

$a_n-b_n=n-\frac{n^2}{2n+1}=\frac{n^2+n}{2n+1}$

$\therefore \dfrac{1}{a_n-b_n}=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\in\left(\dfrac{2}{n+1},\dfrac{2}{n}\right)$

$\therefore \dfrac{n}{2}<a_n-b_n<\dfrac{n+1}{2}$

若 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $c_n=k=\dfrac{n}{2}$，

若 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $c_n=k+1=\dfrac{n+1}{2}$，

$\therefore c_n=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{n+1}{2} & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

三、解答题

17.【解析】

(1)连接 AC，$AB=BC=3$，$\angle ABC=60°$，$\therefore AC=3$ ……………………………………（1 分）

又$\angle ADC=120°$，在$\triangle ACD$ 中由余弦定理，$\cos120°=\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$，即$-\dfrac{1}{2}=\dfrac{AD^2-6}{2\sqrt{3}AD}$，$\therefore AD=\sqrt{3}$

……………………………………………………………………………………（3 分）

又$\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R=\dfrac{AC}{2\sin60°}=\sqrt{3}$ ……………………………………（4 分）

$\therefore\triangle OAD$ 为正三角形，$\angle AOD=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore\angle ABD$ 所对的圆弧$\overset{\frown}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$. ……………………………………（6 分）

(2)在$\triangle ACD$ 中，由余弦定理 $\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$

即 $AD^2+CD^2+AD\cdot CD=9$，……………………………………（8 分）

又 $AD^2+CD^2\geqslant 2AD\cdot CD$，$\therefore 9-AD\cdot CD\geqslant 2AD\cdot CD$

$\therefore AD\cdot CD\leqslant 3$ 当且仅当 $AD=CD=\sqrt{3}$时等号成立 ……………………………………（10 分）

$\therefore S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin60°+\dfrac{1}{2}AD\cdot DC\cdot\sin120°\leqslant\dfrac{1}{2}\times3\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，

所以四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $3\sqrt{3}$. ……………………………………（12 分）

18.【解析】

(1)结论①正确，结论②错误，理由如下：……………………………………（1 分）

对于结论①，因为 $EA//FC$ 且 $FC=EA=4$，连接 AC，所以四边形 $EACF$ 是平行四边形，

所以 $EF//AC$，因为 $EF\not\subset$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，

$\therefore EF//$平面 $ABCD$，$\therefore$结论①正确 ……………………………………（3 分）

对于结论②，若 $AF\perp$平面 EBD，则 $AF\perp BD$，

因为 $EA\perp$平面 $ABCD$，$EA//FC$，所以 $FC\perp$平面 $ABCD$，

所以 $FC\perp BD$，又因为 $AF\cap FC=F$，所以 $BD\perp$平面 AFC，

所以 $BD\perp AC$，而在梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$AD\perp AB$，

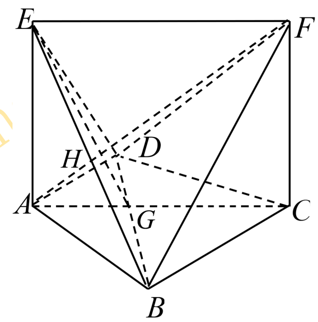
$AD=AB=2$，$BC=4$，所以 $CD=2\sqrt{2}\neq BC$，与 $BD\perp AC$ 矛盾

所以结论②错误. ……………………………………（6 分）

(2)方法一：连接 AC，交 BD 于点 G，连接 EG，则在平面 $EACF$ 中，AF 与 EG 相交，设交点为 H，则由 $AC//EF$ 可得：$\frac{AG}{EF}=\frac{AH}{HF}$，又∵$\frac{AG}{EF}=\frac{AG}{AC}=\frac{AD}{AD+BC}$

$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

∴$\frac{AH}{HF}=\frac{1}{3}$，



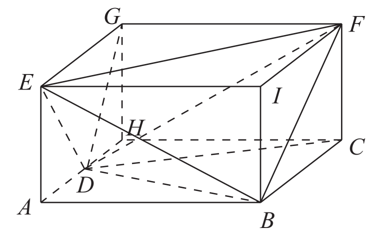
该七面体的体积等于 $V_{E-ABD}+V_{F-BED}+V_{F-BCD}$

$=V_{E-ABD}+3V_{A-BED}+2V_{E-ABD}=6V_{E-ABD}$

$=6\times\frac{1}{3}\times4\times\frac{1}{2}\times2\times2=16$. ………………………………………………… (12 分)

方法二：将该七面体补成如图所示的长方体；

$V_{ABCH-EIFG}-V_{B-EFI}-V_{F-EGD}-V_{D-FCHG}=2\times4\times4-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times4\times4-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times4\times2-\frac{1}{3}\times4\times2\times2=32-\frac{16}{3}-\frac{16}{3}-\frac{16}{3}=16$



方法三：建立空间直角坐标系，利用空间向量求点 F 到平面 BED 的距离后求三棱锥 $F-BED$ 的体积.(参照给分)

19.【解析】(1)用 A 表示事件"一回中，甲队赢球"，则三个回合中，所有可能结果是，AAA，$A\bar{A}A$，$AA\bar{A}$，$\bar{A}AA$，$\bar{A}\bar{A}A$，$\bar{A}A\bar{A}$，$A\bar{A}\bar{A}$，$\bar{A}\bar{A}\bar{A}$，共 8 个结果，其中只有 $A\bar{A}A$，$A\bar{A}\bar{A}$，$\bar{A}AA$ 三个结果，甲队得 1 分.

设"在连续三个回合中，第一回合由甲队发球. 甲队得 1 分"为事件 B，则

$P(B)=\frac{3}{8}$，

所以，甲队得 1 分的概率为$\frac{3}{8}$. ………………………………………………………………………… 6 分

(2)打完四回合的所有可能结果是：$A\bar{A}AA$，$\bar{A}AAA$，$\bar{A}\bar{A}AA$，$\bar{A}A\bar{A}A$，$\bar{A}AA\bar{A}$，$A\bar{A}A\bar{A}$，$A\bar{A}\bar{A}A$，$\bar{A}\bar{A}A\bar{A}$，$\bar{A}A\bar{A}\bar{A}$，$A\bar{A}\bar{A}\bar{A}$，共 10 个结果，其中只有 $A\bar{A}AA$，$\bar{A}AAA$ 两个结果，甲队第四回合比乙队多 2 分，甲获胜.

设"甲队在第四回合获比赛胜利"为事件 C，则

$P(C)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

所以，甲队在第四回合获比赛胜利的概率为$\frac{1}{5}$. ……………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)∵$a=\frac{1}{2}$，∴$f(x)=e^x+\frac{1}{2}x^2-x$，∴$f(x)$的定义域是 R. ………………………………… 1 分

$f'(x)=e^x+x-1$，$(f'(x))'=e^x+1>0$，∴$f'(x)$是增函数. ……………………………………… 2 分

∵$f'(0)=0$，∴当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以，$f(x)$有极小值，且 $f(x)_{极小}=f(0)=1$，$f(x)$没有极大值. ………………………………… 4 分

(2)设 $g(x)=\frac{1}{x}+\ln x$，则 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=-(\frac{1}{x}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$，

∴当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$在区间$(0,1)$上单调递减，

∴当 $0<x<1$ 时，$g(x)=\frac{1}{x}+\ln x$ 的值域是$(g(1),+\infty)$，即值域为$(1,+\infty)$. …………………… 6 分

若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，设 $h(x)=f(x)-g(x)=e^x+a(x^2-2x)-\frac{1}{x}-\ln x$，∵$0<x<1$，∴$x-1<0$，则有 $h'(x)=e^x+2a(x-1)+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}>e^x+(x-1)+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=e^x+\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2}>0$，∴$h(x)$在区间$(0,1)$上单调递

增. $\because h\left(\frac{1}{e^2}\right)=e^{e^{-2}}+a\left(\frac{1}{e^4}-\frac{2}{e^2}\right)-e^2+2<e^{e^{-2}}-e^2+2<e-e^2+2<0$, $h(1)=$

$e-a-1>0$, $\therefore \exists x_1\in\left(\frac{1}{e^2},1\right)$,使得 $h(x_1)=0$,即 $f(x_1)=g(x_1)$. 与题意不合,舍. …………………… 9 分

若 $a>\frac{1}{2}$,则 $f'(0)=1-2a<0$, $f'(1)=e>0$, $\therefore \exists x_2\in(0,1)$,使得 $f'(x_2)=0$. …………………… 10 分

$\because (f'(x))'=e^x+2a>0$, $\therefore f'(x)$在区间$(0,1)$上单调递增. $\therefore$当 $0<x<x_2$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$单调递减;当 $x_2<x<1$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$单调递增. 要使 $f(x)<g(x)$在区间$(0,1)$上恒成立,由于 $f(0)=1<g(1)$,则必须 $f(1)\leqslant g(1)=1$,即 $e-a\leqslant 1$,所以 $a\geqslant e-1$.

所以,实数 a 的取值范围是$[e-1,+\infty)$. …………………………………………………… 12 分

21.【解析】

(1)当 P 为椭圆 E 的上顶点时, $|PF_1|=a$, $\therefore |MF_2|=|PM|=|MF_1|+a$,

又因为 $|MF_1|+|MF_2|=2a$, $\therefore |MF_1|=\frac{a}{2}$, $|PM|=|MF_2|=\frac{3a}{2}$,

所以 $\cos\angle MPN=\dfrac{PM^2+PF_2^2-MF_2^2}{2PM\cdot PF_2}=\dfrac{\left(\frac{3}{2}a\right)^2+a^2-\left(\frac{3}{2}a\right)^2}{2\cdot\frac{3}{2}a\cdot a}=\frac{1}{3}$,

所以 $\cos\angle MPN=1-2\sin^2\angle MPO=\frac{1}{3}$, $\therefore \sin\angle MPO=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore e=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………………………… (5 分)

(2)方法一:设 $P(x_0,y_0)$, $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$, $\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1M}$, $\overrightarrow{PF_2}=\mu\overrightarrow{F_2N}$, $(\lambda,\mu>0)$

$\therefore (-c-x_0,-y_0)=\lambda(x_1+c,y_1)$, $(c-x_0,-y_0)=\mu(x_2-c,y_2)$,

$\therefore x_1=-\left(\frac{x_0+c}{\lambda}+c\right)$, $y_1=-\frac{y_0}{\lambda}$,

又$\because$点 P 在椭圆上,则$\dfrac{\left(\frac{x_0+c}{\lambda}+c\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(\frac{y_0}{\lambda}\right)^2}{b^2}=1$,

$\therefore \left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)+\dfrac{2c(1+\lambda)x_0+c^2(1+\lambda)^2}{a^2}=\lambda^2$,又$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,

$\therefore 2c(1+\lambda)x_0+c^2(1+\lambda)^2=(\lambda^2-1)a^2=3c^2(\lambda^2-1)$,

$\therefore \lambda=\frac{x_0+2c}{c}$,同理 $\mu=\frac{x_0-2c}{-c}=\frac{2c-x_0}{c}$(用"$-c$"代替"$c$"),

$\therefore \lambda+\mu=4$, ………………………………………………………………………… (10 分)

$\therefore \dfrac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}=\dfrac{|PF_1|\cdot|PF_2|}{|PM|\cdot|PN|}=\dfrac{\lambda\mu}{(\lambda+1)(\mu+1)}=\dfrac{\lambda\mu}{\lambda\mu+5}=\dfrac{1}{1+\frac{5}{\lambda\mu}}$,

又 $\lambda+\mu\geqslant 2\sqrt{\lambda\mu}$, $\therefore \lambda\mu\leqslant 4$,所以$\dfrac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}$的最大值为$\frac{4}{9}$. …………………………………… (12 分)

方法二:设 $P(x_0,y_0)$, $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$, $\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1M}$, $\overrightarrow{PF_2}=\mu\overrightarrow{F_2N}$,

$\therefore \begin{cases}x_0+\lambda x_1=-c(1+\lambda)\\ y_0+\lambda y_1=0\end{cases}$, $\begin{cases}x_0+\mu x_2=c(1+\mu)\\ y_0+\mu y_2=0\end{cases}$,

由$\begin{cases}2x_0^2+3y_0^2=3b^2\\ 2x_1^2+3y_1^2=3b^2\end{cases}$,得 $2x_0^2+3y_0^2-\lambda^2(2x_1^2+3y_1^2)=3b^2(1-\lambda^2)$,

即 $2(x_0+\lambda x_1)(x_0-\lambda x_1)+3(y_0+\lambda y_1)(y_0-\lambda y_1)=3b^2(1-\lambda^2)$，

$\therefore 2(-c-\lambda c)(x_0-\lambda x_1)=3b^2(1-\lambda^2)$，即 $x_0-\lambda x_1=\frac{3b}{\sqrt{2}}(\lambda-1)$，同理 $x_0-\lambda x_2=\frac{3b}{\sqrt{2}}(1-\mu)$，

$\therefore \lambda x_1-\mu x_2=\frac{3b}{\sqrt{2}}(1-\mu)+\frac{3b}{\sqrt{2}}(1-\lambda)=3c(2-\lambda-\mu)$，

又$\because \lambda x_1-\mu x_2=-c(1+\lambda)-c(1+\mu)=c(-2-\lambda-\mu)$，

$\therefore c(-2-\lambda-\mu)=3c(2-\lambda-\mu)$，$\therefore \lambda+\mu=4$，以下同解法一.

22.【解析】(1)根据条件，圆 O_1 的标准直角坐标方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$，将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入该方程并化简得圆 O_1 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$. ………………………… 4 分

(2)$\because$圆 O_2 的极坐标方程为 $\rho=2R\sin\theta$，$\therefore$圆 O_1 和圆 O_2 都经过极点 O，设圆 O_1 和圆 O_2 另一个交点的为 (ρ,θ)，则 ρ,θ 满足方程组：

$\begin{cases}\rho=4\cos\theta+2\sin\theta,\\ \rho=2R\sin\theta.\end{cases}$ ………………………… 6 分

由题意得，$\begin{cases}3\sqrt{2}=4\cos\theta+2\sin\theta,\\ 3\sqrt{2}=2R\sin\theta.\end{cases}$ 解得 $\sin\theta=\frac{3\sqrt{2}}{2R}$，$\cos\theta=\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{4R}$，

由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 得，$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2R}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{4R}\right)^2=1$，解得，$R=3$，或 $R=15$. ………………………… 9 分

所以，圆 O_2 的极坐标方程是 $\rho=6\sin\theta$，或 $\rho=30\sin\theta$. ………………………… 10 分

23.【解析】(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=\begin{cases}3, x<-1,\\ -2x+1, -1\leqslant x\leqslant 2,\\ -3, x>2.\end{cases}$ ………………………… 1 分

当 $x<-1$ 时，由 $f(x)\geqslant 1$ 得，$x<-1$. ………………………… 2 分

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，由 $f(x)\geqslant 1$ 得，$-2x+1\geqslant 1$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 0$. ………………………… 3 分

当 $x>2$ 时，由 $f(x)\geqslant 1$ 得，$-3\geqslant 1$，不等式 $f(x)\geqslant 1$ 解集为$\varnothing$. ………………………… 4 分

综上所述，不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集为 $(-\infty,0]$. ………………………… 5 分

(2)$\because x\geqslant 1$，$\therefore f(x)=|2-ax|-x-1$. ………………………… 6 分

由 $f(x)\leqslant x^2$ 得，$|2-ax|-x-1\leqslant x^2$，即 $|2-ax|\leqslant x^2+x+1$，

$\therefore -x^2-x-1\leqslant 2-ax\leqslant x^2+x+1$， ………………………… 7 分

$\therefore \begin{cases}ax\geqslant -x^2-x+1,\\ ax\leqslant x^2+x+3.\end{cases}$ 在 $x\geqslant 1$ 时恒成立，即 $\begin{cases}a\geqslant -x+\frac{1}{x}-1,\\ a\leqslant x+\frac{3}{x}+1.\end{cases}$ 在 $x\geqslant 1$ 时恒成立. ………………………… 8 分

由于 $x\geqslant 1$ 时，$y=-x+\frac{1}{x}-1$ 是减函数，最大值为 -1，$x+\frac{3}{x}+1\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{3}{x}}+1=2\sqrt{3}+1$，等号在 $x=\sqrt{3}$ 时成立，所以，实数 a 的取值范围是 $[-1,2\sqrt{3}+1]$. ………………………… 10 分