机密★启用前(全国卷理科数学)

华大新高考联盟2021届高三4月教学质量测评

理科数学

命题:华中师范大学考试研究院

扫码关注　查询成绩

成绩查询网址:huada. onlyets. com　　关注微信公众号查询成绩:ccnu-testing

本试题卷共4页,23题(含选考题)。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=1\}$,$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$,则集合 $A\cap B$ 中含有的元素有

A. 零个　　B. 一个　　C. 两个　　D. 无数个

2. 已知复数 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,则表示复数 $\frac{1}{|z|+\bar{z}}$ 的点所在象限是

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 拉面是很多食客喜好的食物.师傅在制作拉面的时候,将面团先拉到一定长度,然后对折(对折后面条根数变为原来的2倍),再拉到上次面条的长度.每次对折后,师傅都要去掉捏在一只手里的面团.如果拉面师傅将300 g面团拉成细丝面条,每次对折后去掉捏在手里的面团都是18 g,第一次拉的长度是1 m,共拉了7次,则最后每根1 m长的细丝面条的质量(假定所有细丝面条粗线均匀,质量相等)是

A. $\frac{87}{64}$ g　　B. 3 g

C. 1.5 g　　D. 3.5 g

4. 若角 α 顶点与原点重合,始边与 x 轴非负半轴重合,终边在直线 $2x+y=0$ 上,则 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$

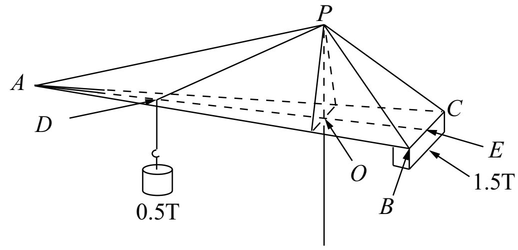
A. $\pm\frac{3}{5}$　　B. $\pm\frac{4}{5}$　　C. $-\frac{3}{10}$　　D. $\frac{3}{10}$

5. 基础建设对社会经济效益产生巨大的作用,某市投入 a 亿元进行基础建设,t 年后产生 $f(t)=a\mathrm{e}^{\lambda t}$ 亿元社会经济效益.若该市投资基础建设4年后产生的社会经济效益是投资额的2倍,且再过 t 年,该项投资产生的社会经济效益是投资额的8倍,则 $t=$

A. 4　　B. 8　　C. 12　　D. 16

6. 图①是建筑工地上的塔吊,图②是根据图①绘制的塔吊简易直观图,点 A,B,C 在同一水平面内.塔身 $PO\perp$ 平面 ABC,直线 AO 与 BC 的交点 E 是 BC 的中点,起重小车挂在线段 AO 上的 D 点,$AB=AC$,$DO=6$ m.若 $PO=2$ m,$PB=3$ m,$\triangle ABC$ 的面积为10 m^2,根据图中标注的数据,忽略$\triangle ABC$ 自重对塔吊平衡的影响,在塔吊保持平衡的条件下可得点 A,P 之间的距离为($0.5OD=1.5OE$)

图①



图②

A. $2\sqrt{17}$ m　　B. $6\sqrt{2}$ m　　C. 8 m　　D. 9m

7. $F(c,0)$是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点，直线 $x=c$ 交该双曲线于点 M,N(M 在第一象限)，点 B、A 分别是该双曲线的左、右顶点，C 是 AB 延长线上的点，$AN\perp CM$. 该双曲线离心率的取值范围是

A. $(\sqrt{2},+\infty)$　　B. $(1,\sqrt{2})$　　C. $(1,\sqrt{3})$　　D. $[2,+\infty)$

8. 如表所示是采取一项单独防疫措施感染 COVID-19 的概率统计表：

单独防疫措施	戴口罩	勤洗手	接种 COVID-19 疫苗
感染 COVID-19 的概率	p	$\frac{1}{45}(1-p)$	$\frac{p}{100}$

一次核酸检测的准确率为 $1-10p$. 某家有 3 人，他们每个人只戴口罩，没有做到勤洗手也没有接种 COVID-19 疫苗，感染 COVID-19 的概率都为 0.01. 这 3 人不同人的核酸检测结果，以及其中任何一个人的不同次核酸检测结果都是互相独立的. 他们 3 人都落实了表中的三项防疫措施，而且共做了 10 次核酸检测. 以这家人的每个人每次核酸检测被确诊感染 COVID-19 的概率为依据，这 10 次核酸检测中，有 X 次结果为确诊，X 的数学期望为

A. 1.98×10^{-6}　　B. 1.98×10^{-7}　　C. 1.8×10^{-7}　　D. 2.2×10^{-7}

9. 将《红楼梦》《西游记》《三国演义》《水浒传》《唐诗三百首》《徐志摩诗集》和《戏曲论丛》7 本书放在一排，下面结论成立的是

A. 戏曲书放在中间的不同放法有 7！种

B. 诗集相邻的不同放法有 2×6！种

C. 四大古典名著互不相邻的不同放法有 3！种

D. 四大古典名著不放在两端的不同放法有 A_5^4 种

10. 已知 $a_i>0(i=1,2,3,4,5)$，$a_3=\ln a_1$，$a_1^{a_5}=a_2$，$a_4=\ln a_2$，则下列等式一定成立的是

A. $a_1,\sqrt{a_2},a_3$ 成等比数列

B. $a_2,\sqrt{a_3},a_4$ 成等比数列

C. $a_3,\sqrt{a_4},a_5$ 成等比数列

D. $a_1,\sqrt{a_3},a_5$ 成等比数列

11. 已知对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x+2)=f(x)$，当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时，$f(x)=x^3-x$. 下列说法错误的是

A. $f(x)$是以 2 为周期的函数

B. 直线 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$是 $f(x)$图象的一条对称轴

C. $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\sum_{i=1}^{n}f(i)=0$

D. $f(x)$的减区间是$\left[2k-\frac{\sqrt{3}}{3},2k+\frac{\sqrt{3}}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

12. 直线 $l:y=k\left(x+\frac{p}{2}\right)(p>0)$与抛物线 $C:y^2=2px$ 有公共点 M,N(M,N 可以重合)，F 是抛物线 C 的焦点，直线 l 与 x 轴交于点 P. 下列结论成立的是

A. $|MN|=k||FM|-|FN||$

B. 若$|FM|=4$，$|FN|=2$，则抛物线 C 的方程是 $y^2=\frac{8}{3}x$

C. 当 M,N 重合时，$\triangle PMF$ 内切圆的面积为 πp^2

D. 点 F 到直线 l 的最大距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}p$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 一长方体的八个顶点都在半径为 1 的球面上，平面 α 把该长方体分成了体积相等的两部分，则平面 α 被这个球截得的截面面积为________.

14. 如果函数 $f(x)$ 在区间 D_1 上和区间 D_2 上都是减函数，且 $f(x)$ 在 $D_1\cup D_2$ 上也是减函数，则称 $f(x)$ 是 $D_1\cup D_2$ 上的间减函数，如 $f(x)=\begin{cases}-x^2,x\geqslant 1,\\-x,x<0.\end{cases}$ 是 $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$ 上的间减函数. $g(x)=\begin{cases}-x-1,x\geqslant 0,\\-x,x<0.\end{cases}$ 是 $(-\infty,0)\cup[0,+\infty)$ 即 $\mathbf{R}$ 上的间减函数，$h(x)=\log_{0.3}x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的间减函数，$y=\cos x$ 不是 $[0,\pi]\cup[2\pi,3\pi]$ 上的间减函数，$y=\dfrac{1}{x}$ 不是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的间减函数. 以下四个函数中：① $f(x)=-x$，② $g(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x,x\leqslant 0,\\\log_{0.5}x,x>0\end{cases}$，③ $y=\begin{cases}x^2,x\leqslant -1,\\\cos x-1,0<x\leqslant\pi\end{cases}$，④ $h(x)=|x|$. 其中是间减函数的是________（写出所有正确答案的序号）.

15. 商家项目投资的利润产生是一个复杂的系统结果. 它与项目落地国的商业环境，政府执政能力，法律生态等都有重大的关联. 如表所示是某项目在中国和南亚某国投资额和相应利润的统计表.

项目落地国	中国					南亚某国				
投资额 x(亿元)	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
利润 y(亿元)	11	12	14	16	19	12	13	13	14	15

请选择平均利润较高的落地国，用最小二乘法求出回归直线方程为________，并根据回归直线方程预计在该国投资 15 亿元所获得的利润是________亿元（第一空 3 分，第二空 2 分）.

参考数据和公式：$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=10$，中国 $\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=20$，南亚某国 $\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=7$

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

16. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足：$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$，$|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

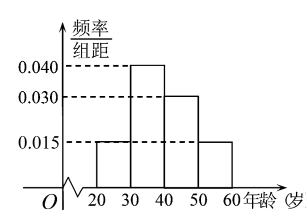
已知函数 $f(x)=2\cos\dfrac{\omega x}{2}\left(\sin\dfrac{\omega x}{2}+\sqrt{3}\cos\dfrac{\omega x}{2}\right)-\sqrt{3}(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

(1) 当 $-\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{5}$ 时，求函数 $f(x)$ 的值域；

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边长分别是 a,b,c. $f(A)=0$，$3\sin B=4\sin C$，$\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$，求 a.

18.（12 分）

某市志愿者的身影活跃在各个角落，他们或积极抗疫，或抗灾救险……为社会发展做出了突出贡献. 现随机抽取了男女志愿者共 200 名，他们年龄（单位：岁）都在区间 $[20,60]$ 上，并绘制了女志愿者年龄分布直方图，如图. 在这 200 名志愿者中，年龄在 $[20,30)$ 上的女志愿者是 15 名，年龄在 $[20,40)$ 上的女志愿者人数是



男志愿人数的$\frac{11}{8}$.

(1)用分层抽样的方法从年龄在区间[30,40),[40,50)上的女志愿者中抽取7人,再从这7人中随机抽取3人,抽取的3人中,有X人年龄在区间[40,50)上,求X的分布列和数学期望;

(2)完成下面2×2列联表,并判断是否有95%的把握认为志愿者的年龄分布与性别有关.

	年龄小于40岁	年龄不小于40岁	合计
男			
女			
合计			

附:参考公式和K^2检验临界值表:$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,$n=a+b+c+d$.

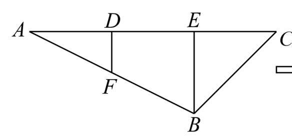
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

19.(12分)

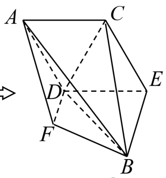
已知D,E都是$\triangle ABC$的边AC的三等分点,F是AB的中点,$BE\perp AC$,$AB=2\sqrt{5}$,$AC=6$,如图①.同时将$\triangle ADF$和$\triangle CEB$分别沿DF,EB折起,折起后$AD/\!/CE$,如图②.

(1)在图②中,求证:$AB\perp DC$;

(2)在图②中,若$DC=2$,求二面角$A-BD-C$的余弦.



图①



图②

20.(12分)

已知$F(c,0)$是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点,直线$y=x-c$交椭圆$C$于$M,N$两点,交$y$轴于点$A$,$\overrightarrow{AM}=\alpha_1\overrightarrow{MF}$,$\overrightarrow{AN}=\beta_1\overrightarrow{NF}$,$\alpha_1+\beta_1=-6$.

(1)求椭圆C的离心率e;

(2)B是椭圆C上的点,O是坐标原点,$\overrightarrow{OB}=\alpha_2\overrightarrow{OM}+\beta_2\overrightarrow{ON}$,求$\alpha_2^2+\beta_2^2$的值.

21.(12分)

已知函数$f(x)=me^x-ex^2$有两个不相等的极值点.

(1)求实数m的取值范围;

(2)设函数$f(x)$两个不相等的极值点分别为x_1,x_2,求证:

(i)$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$;(ii)$x_1+x_2>2x_1x_2$.

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多选,则按所做的第一题计分。

22.[选修4—4:坐标系与参数方程](10分)

直角坐标系xOy中,直线l的参数方程是$\begin{cases}x=\frac{1}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$($t$是参数).以$O$为极点,$x$轴正半轴为极轴的极坐标系中,曲线$C$的极坐标方程是$\rho^2\cos^2\theta+5\sqrt{3}\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+3=0$.

(1)求直线l的极坐标方程和曲线C的直角坐标方程;

(2)求直线l被曲线C截得的线段长.

23.[选修4—5:不等式选讲](10分)

已知函数$f(x)=|x-a|+x|x+a|$.

(1)当$a=1$时,求$f(x)\geqslant7$的解集;

(2)若$a>0$,$bf(-a)=2$,求$\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b}\right)$的最大值.