机密★启用前(全国卷文科数学)

华大新高考联盟2021届高三4月教学质量测评

文科数学

扫码关注　查询成绩

命题:华中师范大学考试研究院

成绩查询网址:huada. onlyets. com　　关注微信公众号查询成绩:ccnu-testing

本试题卷共4页,23题(含选考题)。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=1\}$,$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$,则集合 $A\cap B$ 中含有的元素有

A. 零个　　B. 一个　　C. 两个　　D. 无数个

2. 已知复数 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,则表示复数 $\frac{1}{1+\bar{z}}$ 的点所在象限是

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 拉面是很多食客喜好的食物.师傅在制作拉面的时候,将面团先拉到一定长度,然后对折(对折后面条根数变为原来的2倍),再拉到上次面条的长度.每次对折后,师傅都要去掉捏在一只手里的面团.如果拉面师傅将300 g面团拉成细丝面条,每次对折后去掉捏在手里的面团都是18 g,第一次拉的长度是1 m,共拉了7次,则最后每根1 m长的细丝面条的质量(假定所有细丝面条粗线均匀,质量相等)是

A. $\frac{87}{64}$ g　　B. 3 g

C. 1.5 g　　D. 3.5 g

4. 若角 α 顶点与原点重合,始边与 x 轴非负半轴重合,终边在直线 $2x+y=0$ 上,则 $\sin 2\alpha=$

A. $\pm\frac{3}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{2}{5}$

5. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足:$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$

A. 3　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

6. 已知函数 $f(x)=g(x)\cdot x^2$,曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1,g(1))$ 处的切线方程是 $y=2x-1$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是

A. $y=x+1$　　B. $y=4x-3$　　C. $y=3x-2$　　D. $y=5x-4$

7. 已知 F_1,F_2 是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{5}=1$ 的左,右焦点,过点 F_2 作该双曲线一条渐近线的垂线,垂足为 A,则 $|AF_1|=$

A. 3　　B. 2　　C. 4　　D. 6

8. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1>0$，则下列结论一定成立的是

A. $2^{a_3}, 2^{a_5}, 2^{a_7}$ 成等比数列　　B. $a_2, 2a_4, 3a_6$ 成等比数列

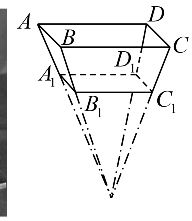
C. $\lg a_3, \lg a_5, \lg a_7$ 成等差数列　　D. $\lg a_2, \lg a_4, \lg a_6$ 成等差数列

9. 已知对$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x+1)=-f(x)$，当$-1\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=x^3-x$. 则 $f\left(\dfrac{23}{2}\right)=$

A. $-\dfrac{5}{8}$　　B. $\dfrac{3}{8}$　　C. $-\dfrac{3}{8}$　　D. $\dfrac{5}{8}$

10. 鼎是古代烹煮用的器物，它是我国青铜文化的代表，在古代被视为立国之器，是国家和权力的象征. 图①是一种方鼎，图②是根据图①绘制的方鼎简易直观图，图中四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是鼎中盛烹煮物的部分，四边形 $ABCD$ 是矩形，其中 $AD=40$ cm，$AB=30$ cm，$A_1B_1=20$ cm，点 A_1 到平面 $ABCD$ 的距离为 18 cm，则这个方鼎一次最多能容纳的食物体积为(假定烹煮的食物全在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内)

图①



图②

A. $10400\ \text{cm}^3$　　B. $14000\ \text{cm}^3$　　C. $14800\ \text{cm}^3$　　D. $15200\ \text{cm}^3$

11. 已知函数 $f(x)=2\cos\dfrac{\omega x}{2}\left(\sin\dfrac{\omega x}{2}+\sqrt{3}\cos\dfrac{\omega x}{2}\right)-\sqrt{3}(\omega>0)$的最小正周期为 π. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边长分别是a,b,c. $f(A)=0$，$3\sin B=4\sin C$，$\triangle ABC$的面积为$3\sqrt{3}$，则$a=$

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{13}$　　C. 4　　D. 3

12. 直线 $l: y=k\left(x+\dfrac{p}{2}\right)(p>0)$与抛物线 $C: y^2=2px$ 有公共点 M,N(M,N 可以重合)，F 是抛物线 C 的焦点，直线 l 与 x 相交于点 P. 下列结论成立的是

A. $|MN|=k\,||FM|-|FN||$

B. 若$|FM|=4$，$|FN|=2$，则抛物线 C 的方程是 $y^2=\dfrac{8}{3}x$

C. 当 M,N 重合时，$\triangle PMF$ 内切圆面积为 πp^2

D. 点 F 到直线 l 的最大距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}p$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 一长方体的八个顶点都在半径为 1 的球面上，平面 α 把该长方体分成了体积相等的两部分，则平面 α 被这个球截得的截面面积为________.

14. 如果函数 $f(x)$在区间 D_1 上和区间 D_2 上都是减函数，且 $f(x)$在 $D_1\cup D_2$ 上也是减函数，则称 $f(x)$是 $D_1\cup D_2$ 上的间减函数，如 $f(x)=\begin{cases}-x^2, x\geqslant 1,\\ -x, x<0.\end{cases}$是$(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$上的间减函数. $g(x)=\begin{cases}-x-1, x\geqslant 0,\\ -x, x<0.\end{cases}$是$(-\infty,0)\cup[0,+\infty)$即 $\mathbf{R}$ 上的间减函数，$h(x)=\log_{0.3}x$ 是$(0,+\infty)$上的间减函数，$y=\cos x$ 不是$[0,\pi]\cup[2\pi,3\pi]$上的间减函数，$y=\dfrac{1}{x}$不是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的间减函数. 以下四个函数中：①$f(x)=-x$，②$g(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x, x\leqslant 0,\\ \log_{0.5}x, x>0\end{cases}$，③$y=\begin{cases}x^2, x\leqslant -1,\\ \cos x-1, 0<x\leqslant\pi\end{cases}$，④$h(x)=|x|$. 其中是间减函数的是________(写出所有正确答案的序号).

15. 商家项目投资的利润产生是一个复杂的系统结果. 它与项目落地国的商业环境，政府执政能力，法律生态等都有重大的关联. 如表所示是某项目在中国和南亚某国投资额和相应利润的统计表.

项目落地国	中国					南亚某国				
投资额 x(亿元)	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
利润 y(亿元)	11	12	14	16	19	12	13	13	14	15

请选择平均利润较高的落地国,用最小二乘法求出回归直线方程为________,并根据回归直线方程预计在该国投资 15 亿元所获得的利润是________亿元(第一空 3 分,第二空 2 分).

参考数据和公式:$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=10$,中国$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=20$,南亚某国$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=7$

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}$,$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

16. 基础建设对社会经济效益产生巨大的作用,某市投入 a 亿元进行基础建设,t 年后产生 $f(t)=ae^{\lambda t}$ 亿元社会经济效益. 若该市投资基础建设 4 年后产生的社会经济效益是投资额的 2 倍,则再过________年,该项投资产生的社会经济效益是投资额的 8 倍.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共 60 分.

17.(12 分)

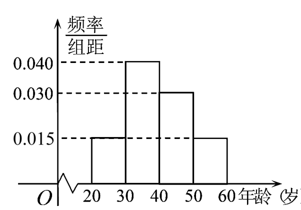
已知 S_n 是正项等差数列$\{a_n\}$前 n 项和,$4S_n=a_n^2+2a_n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设 $b_n=n\cdot 2^{a_n}$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.(12 分)

某市志愿者的身影活跃在各个角落,他们或积极抗疫,或抗灾救险……为社会发展做出了突出贡献. 现随机抽取了男女志愿者共 200 名,他们年龄(单位:岁)都在区间[20,60]上,并绘制了女志愿者年龄分布直方图,如图. 在这 200 名志愿者中,年龄在[20,30)上的女志愿者是 15 名,年龄在[20,40)上的女志愿者人数是男志愿人数的$\dfrac{11}{8}$.



(1)用分层抽样的方法从年龄在区间[30,40),[40,50)上的女志愿者中抽取 7 人,再从这 7 人中随机抽取 2 人,求抽取的 2 人一个年龄在区间[30,40)上,另一个在区间[40,50)上的概率;

(2)完成下面 2×2 列联表,并判断是否有 95%的把握认为志愿者的年龄分布与性别有关.

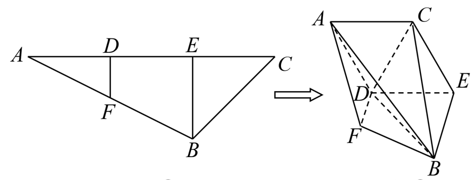
	年龄小于 40 岁	年龄不小于 40 岁	合计
男			
女			
合计			

附:参考公式和 K^2 检验临界值表:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

19.(12 分)

已知 D,E 都是$\triangle ABC$ 的边 AC 的三等分点,F 是 AB 的中点,$BE\perp AC$,$AB=2\sqrt{5}$,$AC=6$,如图①.同时将$\triangle ADF$ 和$\triangle CEB$ 分别沿 DF,EB 折起,折起后 $AD/\!/CE$,如图②.



图①　　图②

(1)在图②中,求证:$AB\perp DC$;

(2)在图②中,若 $DC=2$,求点 A 到平面 BDC 的距离.

20.(12 分)

已知 $F(c,0)$是椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点,直线 $y=x-c$ 交椭圆 C 于 M,N 两点,交 y 轴于点 A,$\overrightarrow{AM}=\alpha_1\overrightarrow{MF}$,$\overrightarrow{AN}=\beta_1\overrightarrow{NF}$,$\alpha_1+\beta_1=-6$.

(1)求椭圆 C 的离心率 e;

(2)点 B 与 M 关于 x 轴对称,$|MN|=\sqrt{6}$,求直线 BN 与 x 轴交点的坐标.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=me^x-ex^2$ 有两个不相等的极值点.

(1)求实数 m 的取值范围;

(2)求证:当 $0<x<1$ 时,$f(x)<\frac{e^x}{x}$.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程是$\begin{cases}x=\frac{1}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$($t$ 是参数).以 O 为极点,x 轴正半轴为极轴的极坐标系,曲线 C 的极坐标方程是 $\rho^2\cos^2\theta+5\sqrt{3}\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+3=0$.

(1)求直线 l 的极坐标方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2)求直线 l 被曲线 C 截得的线段长.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x-a|+x|x+a|$.

(1)当 $a=1$ 时,求 $f(x)\geqslant 7$ 的解集;

(2)若 $a>0$,$bf(-a)=2$,求$\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b}\right)$的最大值.