

华大新高考联盟 2022 届高三 11 月教学质量测评

理科数学



11547.11 查询成绩

命题：华中师范大学考试研究院

成绩查询网址：huada.onlyets.com 关注微信公众号查询成绩：[ccnu_testing](https://www.wechat.com/p/1154711)

本试题卷共 4 页，共 23 题(含选考题)，满分 150 分，考试用时 120 分钟

★ 祝考试顺利 ★

注意事项：

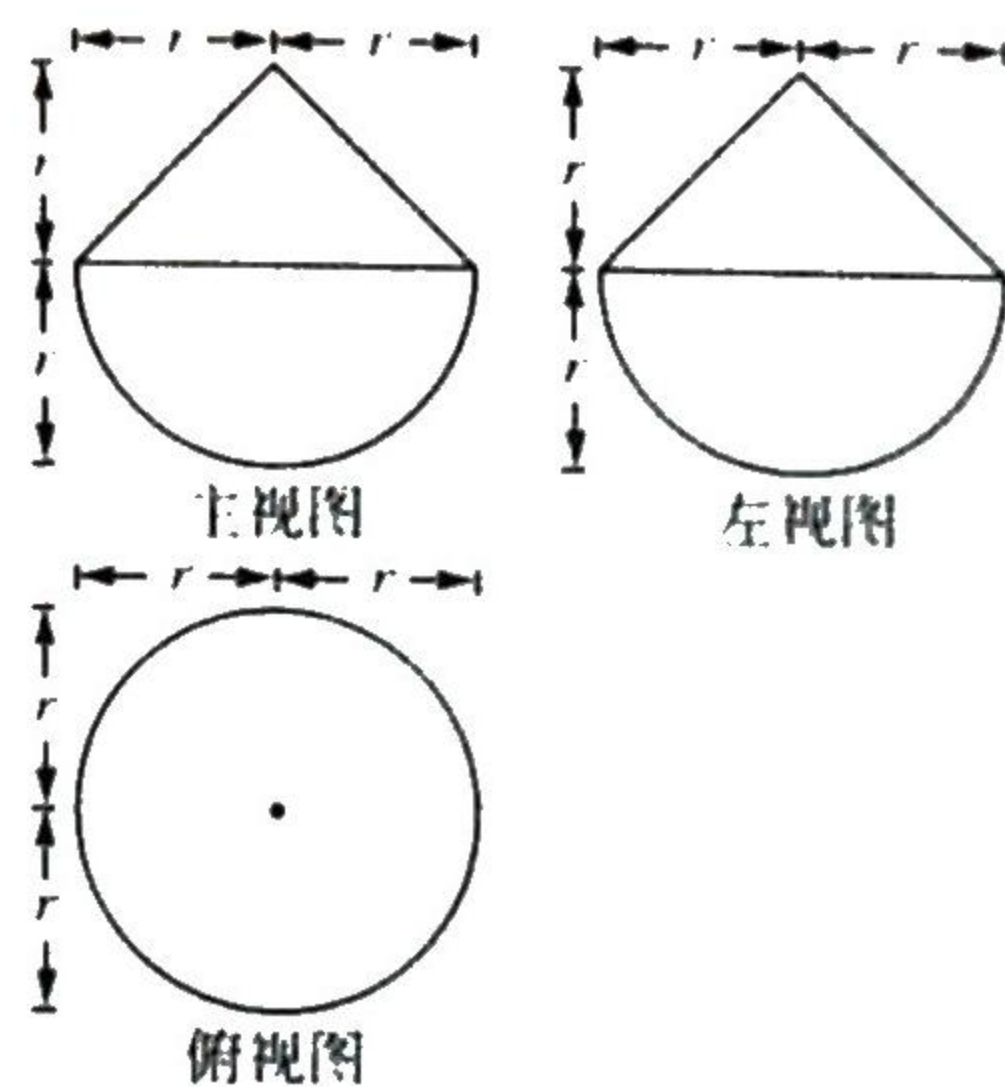
1. 答题前，考生务必将自己的学校、班级、姓名、准考证号填写在答题卷指定位置，认真核对与准考证号条形码上的信息是否一致，并将准考证号条形码粘贴在答题卷上的指定位置。
2. 选择题的作答：选出答案后，用 2B 铅笔把答题卷上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。答在试题卷上无效。
3. 非选择题的作答：用黑色墨水的签字笔直接答在答题卷上的每题所对应的答题区域内。答在试题卷上或答题卷指定区域外无效。
4. 考试结束，监考人员将答题卷收回，考生自己保管好试题卷，评讲时带来。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 已知复数 $z=i+1$, i 是虚数单位, 则 $z \cdot \bar{z} =$
 - A. 0
 - B. 1
 - C. 2
 - D. 4
2. 已知集合 $A=\{x|x=m^2+1, m \in \mathbf{N}\}$, $B=\{y|y=n^4+1, n \in \mathbf{N}\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. \emptyset
 - B. A
 - C. B
 - D. \mathbf{N}
3. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, e^x > 0$, 命题 $q: \exists x \geq 10, \lg x < 1$, 下列为真命题的是
 - A. $p \wedge q$
 - B. $\neg p \wedge q$
 - C. $\neg p \vee q$
 - D. $p \wedge (\neg q)$
4. “耐尽推排趾未颠，莫嗤身价不多钱”是清代诗人叶际唐的诗句，诗句赞颂了不倒翁自强自立、坚韧不拔的精神。图(1)是一些不倒翁模型，假设图(2)是图(1)中一不倒翁的三视图，其中 r 是给定的正实数，则该不倒翁的表面积为



(1)



(2)

第 4 题图

- A. $(2-\sqrt{2})\pi r^2$
- B. $\sqrt{2}\pi r^2$
- C. $2\sqrt{2}\pi r^2$
- D. $(2+\sqrt{2})\pi r^2$

5. 已知两条不同直线 m, n 和两个不同平面 α, β , 下列判断正确的是
- A. 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta, m \parallel n$, 则 $\alpha \parallel \beta$ B. 若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, m \parallel n$, 则 $\alpha \perp \beta$
 C. 若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, \alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$ D. 若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, m \perp \beta$, 则 $m \perp n$
6. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, 且 $1a_1, 2a_2, a_3$ 成等差数列, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n
- A. $2^n - 1$ B. $2^n + 1$ C. 2^{n-1} D. 2^{n+1}
7. 已知 $f(x) = ax + a + \cos x (a \in \mathbf{R})$, 则在曲线 $y = f(x)$ 上一点 $(0, 2)$ 处的切线方程为
- A. $x - y + 2 = 0$ B. $x + y - 2 = 0$
 C. $2x - y + 2 = 0$ D. $2x + y - 2 = 0$
8. 若把函数 $y = f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 则得到函数 $y = \sin x$ 的图象. 若把 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 则 $g(x) =$
- A. $\sin 2x$ B. $-\cos 2x$
 C. $\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}\right)$ D. $\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8}\right)$
9. $(1-2y)^5 \left(2 + \frac{1}{y}\right)^4$ 的展开式中 y^4 的系数为
- A. -256 B. 256 C. -1 024 D. 1 024
10. 中国的五岳是指在中国境内的五座名山, 坐落于东西南北中五个方位, 分别是东岳泰山, 西岳华山, 南岳衡山, 北岳恒山, 中岳嵩山. 某家庭一家三口计划在假期出游, 每人选一个地方, 恰有 1 人选泰山的概率为
- A. $\frac{48}{125}$ B. $\frac{36}{125}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{10}$
11. 设 $a = \frac{1}{2} \ln 1.01, b = 1.01 - \sqrt{1.01}, c = 0.01$, 则
- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$
12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 若双曲线不存在以点 $(2a, a)$ 为中点的弦, 则双曲线离心率 e 的取值范围是
- A. $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ B. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ C. $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

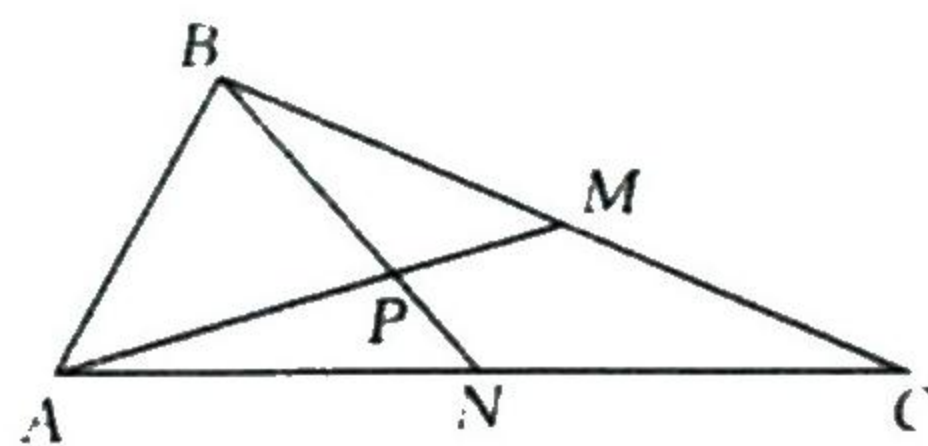
13. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $(1, 0)$, 则该抛物线上一点到焦点的距离的取值范围是_____.

14. 已知 $\mathbf{a} = (1, 2), \mathbf{b} = (-1, 4)$, 若实数 λ 满足 $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$, 则 $\lambda =$ _____.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 2, AC = 5, \cos \angle BAC = \frac{7}{20}$, BC, AC 边上的两条中线 AM, BN 相交于点 P ,

则 $\angle MPN$ 的余弦值为_____.

16. 一块三棱锥形状的余料 $P-ABC$, 其三条侧棱 PA, PB, PC 两两垂直. 现需将其切割成直三棱柱, 使得直三棱柱的侧棱与原三棱锥的一条侧棱平行或重合, 若 $PA = a, PB = b, PC = c$. 则切割得到的直三棱柱的最大体积为



第 15 题图

..... (结果用 a, b, c 表示, 其中 a, b, c 为正实数)

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答; 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 5 小题, 每小题 12 分, 共 60 分。

17. (12 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

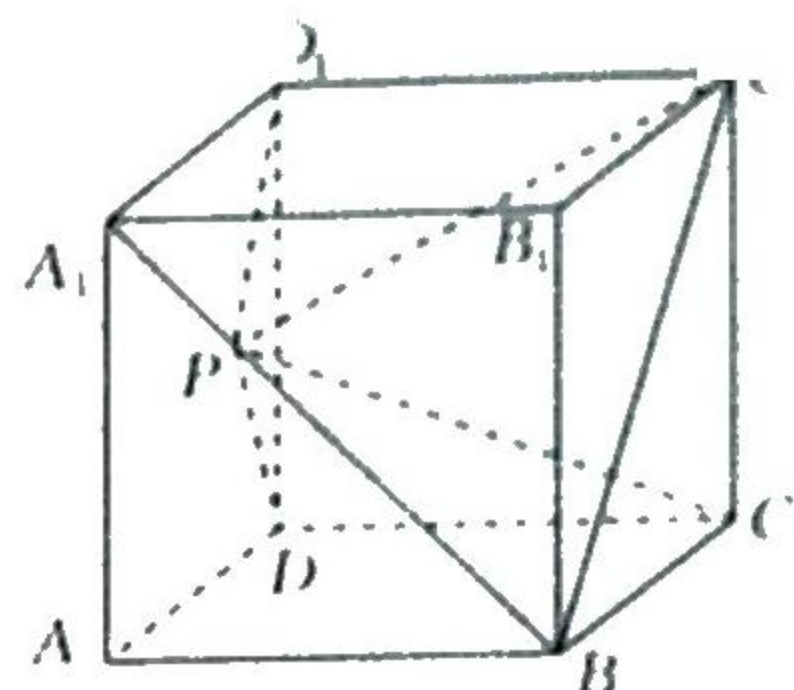
(2) 求 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_{2021}}$ 的值

18. (12 分)

如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 动点 P 在线段 A_1B 上, 设 l 是平面 DD_1P 与平面 CC_1P 的交线。

(1) 求证: $l \parallel CC_1$;

(2) 若 P 是线段 A_1B 上靠近 A_1 的四等分点, 求平面 DD_1P 与平面 CC_1P 所成二面角的正弦值。



第 18 题图

19. (12 分)

某校即将在十月举行一场主题为“迎国庆、展风采”的数学学科竞赛活动, 决赛环节共有 4 个必答题, 假设选手小明答对每个问题的概率是 $\frac{3}{4}$, 且小明答题时状态稳定, 前后答题时相互之间没有影响, 每道题答对得 2 分, 答错得 0 分. 记小明得分为随机变量 X .

(1) 求 $X=2$ 的概率;

(2) 试列出 X 的分布列;

(3) 求 X 的期望和方差.

20. (12 分)

已知 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 动点 P 满足直线 AP 的斜率与直线 BP 的斜率乘积为 $e^2 - 1$. 当 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 点 P

的轨迹为 C_1 ; 当 $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时, 点 P 的轨迹为 C_2 .

(1) 求 C_1, C_2 的方程.

(2) 是否存在过 C_1 右焦点的直线 l , 满足直线 l 与 C_1 交于 C, D 两点, 直线 l 与 C_2 交于 M, N 两点, 且 $|MN| = \sqrt{3}|CD|$? 若存在, 求所有满足条件的直线 l 的斜率之积; 若不存在, 请说明理由.

21. (12分)

已知 $f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = ax + a \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 当 $a = \frac{1}{e}$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \\ y = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 以坐标原点为极点, x 轴的正

半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta - \rho \sin \theta + 2 = 0$.

- (1) 求曲线 C_1, C_2 的直角坐标方程;
(2) 求 C_1 与 C_2 公共点的直角坐标.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知 a, b 均为正数, 且 $a + b = 1$.

- (1) 求 $a^2 + b^2$ 的最小值;
(2) 证明: $ab^2 \leq \frac{4}{27}$.