机密★启用前(全国卷理科数学)

# 华大新高考联盟2022届高三11月教学质量测评

## 理科数学参考答案和评分标准

一、选择题

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | C | D | D | C | A | A | B | B | A | A | B |

1.【答案】C

【命题意图】考查共轭复数的运算,考查数学运算等数学核心素养.

【解析】因为 $z=\mathrm{i}+1$,所以 $\bar{z}=-\mathrm{i}+1$. 故 $z\cdot\bar{z}=(\mathrm{i}+1)(-\mathrm{i}+1)=2$.

2.【答案】C

【命题意图】考查集合的表示法、集合与集合的关系、集合的基本运算,考查数学抽象等数学核心素养.

【解析】对于 $B$:$y=n^4+1=(n^2)^2+1$,从而 $B\subseteq A$,$A\cap B=B$.

3.【答案】D

【命题意图】考查命题的真假、或且非运算,考查数学抽象等数学核心素养.

【解析】由题可知,$p$ 真 $q$ 假,故 $p\wedge q$ 为假,$\neg p\wedge q$ 为假,$\neg p\vee q$ 为假,$p\wedge(\neg q)$为真.

4.【答案】D

【命题意图】考查圆锥和球的表面积,考查直观想象、数学建模等数学核心素养.



【解析】由三视图可知,该不倒翁上半部分是一个圆锥,底面半径为 $r$,高为 $r$,母线长为$\sqrt{2}r$;下半部分是一个半球,半径为 $r$. 于是不倒翁的表面积为 $\pi\cdot r\cdot\sqrt{2}r+\frac{1}{2}\cdot 4\pi r^2=(2+\sqrt{2})\pi r^2$.

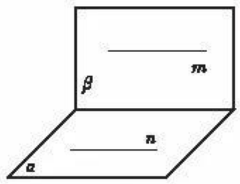
5.【答案】C

【命题意图】考查线线平行、线面平行、面面平行、线面垂直,考查直观想象等数学核心素养.

【解析】对于选项 A,如图,选项 A 错误.

对于选项 B,若 $m\perp\alpha$,$n\perp\beta$,$m/\!/n$,则 $\alpha/\!/\beta$. 故选项 B 错误.

对于选项 D,若 $m\perp\alpha$,$n\perp\beta$,$m\perp\beta$,则 $m/\!/n$. 故选项 D 错误.



第5题图

6.【答案】A

【命题意图】考查等差数列、等比数列的前 $n$ 项和,考查数学运算等数学核心素养.

【解析】设数列$\{a_n\}$的公比为 $q$,因为 $4a_1,2a_2,a_3$ 成等差数列,

所以 $4a_1+a_3=4a_2$,即 $4a_1+a_1q^2=4a_1q$,将 $a_1=1$ 代入得 $q^2-4q+4=0$,解得 $q=2$,

于是 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

7.【答案】A

【命题意图】考查三角函数、切线方程、函数求导,考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】因为点(0,2)在曲线上,所以 $f(0)=a+\cos 0=2$,于是 $a=1$,

所以 $f(x)=x+\cos x+1$,$f'(x)=1-\sin x$,$f'(0)=1$,

故切线方程为 $y-2=x-0$,即 $x-y+2=0$.

8.【答案】B

【命题意图】考查三角函数图象的伸缩、平移变换,考查逻辑推理、数学运算等数学核心素养.

【解析】将 $y=\sin x$ 的图象纵坐标不变，横坐标缩短至原来的$\frac{1}{2}$得到 $y=f(x)$的图象，故 $f(x)=\sin 2x$，

将 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度得到 $g(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x$.

9.【答案】B

【命题意图】考查二项式定理，考查数学运算等数学核心素养.

【解析】观察到$(1-2y)^5$ 展开式中含 $y$ 项的最高次为 5，$\left(2+\frac{1}{y}\right)^4$ 展开式中含 $y$ 项的次数为非正数，故分两类：

①当$(1-2y)^5$ 中"贡献"$y^5$ 项时，$\left(2+\frac{1}{y}\right)^4$ 中"贡献"$y^{-1}$项，则展开式中 $y^4$ 的系数为 $C_5^5(-2)^5C_4^1 2^3=-2^{10}$；

②当$(1-2y)^5$ 中"贡献"$y^4$ 项时，$\left(2+\frac{1}{y}\right)^4$ 中"贡献"常数项，则展开式中 $y^4$ 的系数为 $C_5^4(-2)^4C_4^0 2^4=5\times 2^8$.

于是展开式中 $y^4$ 的系数为$-2^{10}+5\times 2^8=256$.

10.【答案】A

【命题意图】考查古典概型概率，考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】3 个人随机选 5 个地方，基本事件的总数为 $5^3$. 恰有 1 人选泰山含基本事件数 $C_3^1(4+A_4^2)=48$. 恰有 1 人选泰山的概率为$\frac{48}{5^3}=\frac{48}{125}$.

11.【答案】A

【命题意图】考查二次函数、对数函数、导数，考查数学建模、数学运算、逻辑推理等数学核心素养.



【解析】取 $f(x)=\ln x$，$g(x)=x^2-x$，$h(x)=x^2-1$，现比较 $f(\sqrt{1.01})$，$g(\sqrt{1.01})$，$h(\sqrt{1.01})$的大小.

设 $F(x)=f(x)-g(x)=\ln x-(x^2-x)=\ln x-x^2+x$，则 $F(1)=0$.

当 $x>1$ 时，$F'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=-\frac{(x-1)(2x+1)}{x}<0$，所以 $F(x)$在 $x\in(1,+\infty)$上单调递减.

于是当 $x>1$ 时，$F(x)<F(1)=0$，故当 $x>1$ 时，$f(x)<g(x)$，从而 $f(\sqrt{1.01})<g(\sqrt{1.01})$，即 $a<b$.

设 $H(x)=g(x)-h(x)=(x^2-x)-(x^2-1)=1-x$，因为 $x>1$，所以 $H(x)<0$.

故当 $x>1$ 时，$g(x)<h(x)$，从而 $g(\sqrt{1.01})<h(\sqrt{1.01})$，即 $b<c$. 于是 $a<b<c$.

12.【答案】B

【命题意图】考查双曲线的性质、直线与双曲线的位置关系，考查逻辑推理、数学运算等数学核心素养.

【解析】由题意得，$0\leqslant\frac{(2a)^2}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}\leqslant 1$，

故 $3\leqslant\frac{a^2}{b^2}\leqslant 4$，即 $3b^2\leqslant a^2\leqslant 4b^2$，从而 $3(c^2-a^2)\leqslant a^2\leqslant 4(c^2-a^2)$，

于是 $3c^2\leqslant 4a^2$，$5a^2\leqslant 4c^2$，从而$\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant e\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

## 二、填空题

13.【答案】$[1,+\infty)$.

【命题意图】考查抛物线的性质，考查逻辑推理等数学核心素养.

【解析】由题可知$\frac{p}{2}=1$，即 $p=2$，

设抛物线上任意一点为 $M(x_1,y_1)(x_1\geqslant 0)$，焦点为 $F$，

由抛物线的定义得$|MF|=x_1+1$，因为 $x_1\geqslant 0$，故$|MF|\geqslant 1$.

14.【答案】$-\dfrac{5}{7}$.

【命题意图】考查平面向量，考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】因为$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，所以$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，

所以$1-\lambda+4+8\lambda=0$，故$\lambda=-\dfrac{5}{7}$.

15.【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

【命题意图】考查解三角形及平面向量，考查数学建模、数学抽象等数学核心素养.

【解析】由题可知$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{BN}$所成角即为$\angle MPN$.

$$\text{故}|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\times2^2+\frac{1}{4}\times5^2+\frac{1}{2}\times2\times5\times\frac{7}{20}}=3,$$

$$|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2}=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$$

$$=\sqrt{2^2+\frac{1}{4}\times5^2-2\times5\times\frac{7}{20}}=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

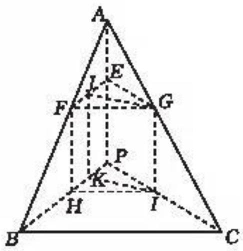
$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=-\frac{1}{2}\times2^2+\frac{1}{4}\times5^2-\frac{1}{4}\times2\times5\times\frac{7}{20}=\frac{27}{8}.$$

于是$\cos\angle MPN=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



16.【答案】$\dfrac{2abc}{27}$.




第 16 题图

【命题意图】考查三棱柱的体积计算及空间几何体的综合，考查直观想象、数学建模、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】先考虑顶点位置，如图，若直三棱柱 $EJG$-$PKI$ 上底面的顶点 $J$ 没有落在棱 $AB$ 上，总可以将 $EJ$ 延长交棱 $AB$ 于点 $F$，过点 $F$ 作 $PA$ 的平行线交 $PB$ 于点 $H$，得到新的三棱柱 $EFG$-$PHI$，新三棱柱 $EFG$-$PHI$ 的体积比原三棱柱 $EJG$-$PKI$ 的体积大，其他上底面顶点同理. 若要直三棱柱的体积最大，则上底面三个顶点均落在相应的棱上.

因为底面 $EFG$∥底面 $PBC$，所以$\triangle EFG\backsim\triangle PBC$，设$\dfrac{EF}{PB}=x$，则$\dfrac{EG}{PC}=x$，$\dfrac{EP}{PA}=1-x$，$0<x<1$.

于是$EF=bx$，$EG=cx$，$EP=(1-x)a$，

故三棱柱 $EFG$-$PHI$ 的体积为$V=\dfrac{1}{2}\cdot bx\cdot cx\cdot(1-x)a=\dfrac{abc}{2}(-x^3+x^2)$.

设$f(x)=-x^3+x^2$，$0<x<1$，则$f'(x)=-3x^2+2x=x(2-3x)$，

由$f'(x)>0$，得$0<x<\dfrac{2}{3}$，由$f'(x)<0$，得$x>\dfrac{2}{3}$或$x<0$，

故$f(x)$在$\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{2}{3},1\right)$上单调递减，

故$f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{27}$.

从而体积最大值为$\frac{2abc}{27}$.

三、解答题

17.【命题意图】考查数列通项和数列求和，考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)当 $n=1$ 时，$a_1^3=1$，从而 $a_1=1$；

当 $n\geqslant2$ 时，可得

$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$， ①

$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{n-1}^3=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$， ②

由①－②得 $a_n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n^2(n-1)^2}{4}=n^3$，

于是 $a_n=n$.

经检验，$a_1=1$ 满足 $a_n=n$，故 $a_n=n$. ………………………………………………………… 6分

(2)由(1)可得 $a_n=n$，故 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，

从而$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

于是$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{2\,021}}=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{2\,021}-\frac{1}{2\,022}\right)=\frac{2\,021}{1\,011}$. ……………… 12分

18.【命题意图】考查空间中线线、线面、面面的位置关系，二面角的平面角的求法，考查直观想象、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)证明：$\because CC_1/\!/DD_1$，$DD_1\subset$平面 $DD_1P$，$CC_1\not\subset$平面 $DD_1P$，

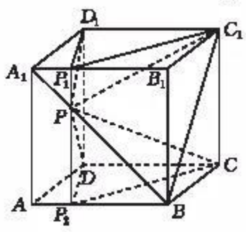
$\therefore CC_1/\!/$平面 $DD_1P$.



又$\because CC_1\subset$平面 $CC_1P$，平面 $DD_1P\cap$平面 $CC_1P=l$，

$\therefore l/\!/CC_1$. ……………………………………………………………………………………………… 4分

(2)解：方法一　如图(1)，在平面 $A_1ABB_1$ 内过点 $P$ 作 $P_1P_2/\!/AA_1$ 交 $A_1B_1$ 于点 $P_1$，交 $AB$ 于点 $P_2$，连接 $D_1P_1$，$C_1P_1$，$DP_2$，$CP_2$.



第18题图(1)

$\because P_1P_2/\!/AA_1$，$AA_1/\!/DD_1$，

$\therefore$平面 $DD_1P$ 即平面 $DD_1P_1P_2$.

$\because P_1P_2/\!/AA_1$，$AA_1/\!/CC_1$，

$\therefore$平面 $CC_1P$ 即平面 $CC_1P_1P_2$.

现需求平面 $DD_1P_1P_2$ 与平面 $CC_1P_1P_2$ 所成二面角的平面角的正弦值，

平面 $DD_1P_1P_2\cap$平面 $CC_1P_1P_2=P_1P_2$，

$\because P_1P_2\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$，$D_1P_1\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$，$C_1P_1\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$，

$\therefore D_1P_1\perp P_1P_2$，$C_1P_1\perp P_1P_2$，

$\therefore\angle D_1P_1C_1$ 即为二面角 $D_1$-$P_1P_2$-$C_1$ 的平面角.

在$\triangle D_1P_1C_1$ 中，$D_1P_1=\sqrt{A_1D_1^2+A_1P_1^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$，$C_1P_1=\sqrt{B_1C_1^2+B_1P_1^2}=\frac{5}{4}$，$C_1D_1=1$，

由余弦定理得 $\cos\angle D_1P_1C_1=\frac{D_1P_1^2+C_1P_1^2-C_1D_1^2}{2D_1P_1\cdot C_1P_1}=\frac{\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2-1^2}{2\times\frac{\sqrt{17}}{4}\times\frac{5}{4}}=\frac{13\sqrt{17}}{85}$，

故平面 $DD_1P$ 与平面 $CC_1P$ 所成二面角的正弦值为$\frac{16\sqrt{17}}{85}$. ……………………………… 12分

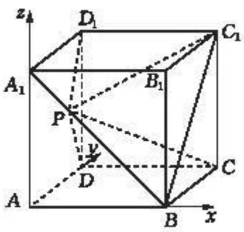
方法二　如图(2)，以点 $A$ 为坐标原点，$AB$，$AD$，$AA_1$ 所在直线为 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴建立空间直角坐标系，

则 $P\left(\frac{1}{4},0,\frac{3}{4}\right)$,$C(1,1,0)$,$C_1(1,1,1)$,$D(0,1,0)$,$D_1(0,1,1)$,

$\overrightarrow{CP}=\left(-\frac{3}{4},-1,\frac{3}{4}\right)$,$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,1)$,$\overrightarrow{DP}=\left(\frac{1}{4},-1,\frac{3}{4}\right)$,$\overrightarrow{DD_1}=(0,0,1)$.

设平面 $CC_1P$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,平面 $DD_1P$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}-\frac{3}{4}x_1-y_1+\frac{3}{4}z_1=0,\\ z_1=0.\end{cases}$



第 18 题图(2)

令 $x_1=-1$,则 $\boldsymbol{m}=\left(-1,\frac{3}{4},0\right)$.

同理,$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DD_1}=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}\frac{1}{4}x_2-y_2+\frac{3}{4}z_2=0,\\ z_2=0.\end{cases}$

令 $x_2=-1$,则 $\boldsymbol{n}=\left(-1,-\frac{1}{4},0\right)$.

设所求二面角的平面角为 $\theta$,则 $|\cos\theta|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{1-\frac{3}{16}}{\frac{5}{4}\times\frac{\sqrt{17}}{4}}\right|=\frac{13\sqrt{17}}{85}$.

$\therefore\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{16\sqrt{17}}{85}$.

$\therefore$平面 $DD_1P$ 与平面 $CC_1P$ 所成二面角的正弦值为$\frac{16\sqrt{17}}{85}$. ········································ 12 分

19.【命题意图】考查 $n$ 次独立重复试验、分布列、期望、方差,考查数据分析、数学运算等数学核心素养.

【解析】(1)$X=2$ 表示小明答对 1 道题得 2 分,其他题不得分,



故 $P(X=2)=C_4^1\times\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{12}{256}=\frac{3}{64}$. ········································ 2 分

(2)$X=2i(i=0,1,2,3,4)$表示小明答对 $i$ 道题得 $2i$ 分,其他题不得分,

故 $P(X=2i)=C_4^i\times\left(\frac{3}{4}\right)^i\times\left(\frac{1}{4}\right)^{4-i}=\frac{3^iC_4^i}{256}$,

分别代入 $i=0,1,2,3,4$,列出分布列如下:

| X | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | $\frac{1}{256}$ | $\frac{12}{256}$ | $\frac{54}{256}$ | $\frac{108}{256}$ | $\frac{81}{256}$ |

········································ 8 分

(3)$E(X)=0\times\frac{1}{256}+2\times\frac{12}{256}+4\times\frac{54}{256}+6\times\frac{108}{256}+8\times\frac{81}{256}=6$.

$D(X)=(0-6)^2\times\frac{1}{256}+(2-6)^2\times\frac{12}{256}+(4-6)^2\times\frac{54}{256}+(6-6)^2\times\frac{108}{256}+(8-6)^2\times\frac{81}{256}=3$.

故 $X$ 的数学期望为 6,方差为 3. ········································ 12 分

20.【命题意图】考查直线与椭圆的位置关系,考查直观想象、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)设 $P(x_P,y_P)$,$x_P\neq\pm2$,

对于 $C_1$,由题可得$\frac{y_P-0}{x_P-(-2)}\cdot\frac{y_P-0}{x_P-2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1$,

整理得$\frac{x_P^2}{4}+y_P^2=1$,

故 $C_1$ 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1(x\neq\pm2)$.

对于 $C_2$，由题可得 $\frac{y_P-0}{x_P-(-2)}\cdot\frac{y_P-0}{x_P-2}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-1$，

整理得 $\frac{x_P^2}{4}-y_P^2=1$，

故 $C_2$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1(x\neq\pm2)$. ………………………………………………………… 4分

(2)由(1)可得 $C_1$：$\frac{x^2}{4}+y^2=1(x\neq\pm2)$，$C_2$：$\frac{x^2}{4}-y^2=1(x\neq\pm2)$，

$C_1$ 的右焦点为 $(\sqrt{3},0)$，设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，
当直线 $l$ 的斜率不存在时，直线 $l$ 与 $C_2$ 无交点，不满足题意，故直线 $l$ 的斜率存在.
于是可设直线 $l$ 的方程为 $y=k(x-\sqrt{3})$，

联立 $\begin{cases}y=k(x-\sqrt{3}),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 $y$ 得 $(4k^2+1)x^2-8\sqrt{3}k^2x+4(3k^2-1)=0$，

$\Delta_1=16(k^2+1)>0$ 恒成立，

由韦达定理：$x_1+x_2=\frac{8\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4(3k^2-1)}{4k^2+1}$． ①

于是 $|CD|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$.

将①代入整理得 $|CD|=\frac{4(k^2+1)}{4k^2+1}$.

同理 $|MN|=\frac{4\sqrt{(k^2+1)(1-k^2)}}{|4k^2-1|}$，其中 $\Delta_2=16(1-k^2)>0$，故 $k^2<1$.



因为 $|MN|=\sqrt{3}|CD|$，所以 $\frac{4\sqrt{(k^2+1)(1-k^2)}}{|4k^2-1|}=\frac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{4k^2+1}$.

设 $t=k^2(0<t<1)$，则 $\frac{\sqrt{(t+1)(1-t)}}{|4t-1|}=\frac{\sqrt{3}(t+1)}{4t+1}$，即 $\frac{\sqrt{1-t}}{|4t-1|}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{t+1}}{4t+1}$，
平方整理得 $32t^3+8t^2-14t+1=0$，
因式分解得 $(2t-1)(16t^2+12t-1)=0$，

解得 $t_1=\frac{1}{2}$，$t_2=\frac{-3+\sqrt{13}}{8}$，$t_3=\frac{-3-\sqrt{13}}{8}$(舍去).

即 $k_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，$k_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{8}}$.

于是所有满足条件的直线 $l$ 的斜率之积为 $k_1k_2k_3k_4=(-t_1)(-t_2)=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{-3+\sqrt{13}}{8}\right)=\frac{\sqrt{13}-3}{16}$.
………………………………………………………………………………………………… 12分

21.【命题意图】考查导数、函数的最值、不等式恒成立问题，考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)当 $a=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)=\frac{1}{e}\left(\frac{e^x}{x}-x+\ln x\right)$，定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{e}\left(\frac{xe^x-e^x}{x^2}-1+\frac{1}{x}\right)=\frac{xe^x-e^x-x^2+x}{ex^2}=\frac{(x-1)(e^x-x)}{ex^2}$.
设 $g(x)=e^x-x$，$x>0$，$g'(x)=e^x-1>0$，故 $g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增，
故 $g(x)>g(0)=1>0$.
由 $f'(x)>0$ 解得 $x>1$；由 $f'(x)<0$ 解得 $0<x<1$，
故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,1)$. ………………………………… 4分

(2)若要 $f(x)\geqslant 0$,只需$\dfrac{e^{x-1}}{x}\geqslant a(x-\ln x)$,

即需要 $e^{x-\ln x-1}\geqslant a(x-\ln x)$恒成立,

设$t(x)=x-\ln x,x>0,t'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$,

由$t'(x)>0$得$x>1$;由$t'(x)<0$得$0<x<1$,

故$t(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,

故$t(x)\geqslant t(1)=1$,

于是需要 $e^{t-1}\geqslant at$ 恒成立,即$\dfrac{e^{t-1}}{t}\geqslant a$ 恒成立.

由(1)中解答过程可得:当$x>0$时,$g(x)=e^x-x>1$,从而$e^x>x+1$,即$\dfrac{e^x}{x+1}>1$.

用$t-1$替换上式中的$x$得$\dfrac{e^{t-1}}{t}>1$,

结合当$t=1$时,$\dfrac{e^{t-1}}{t}=1$,故$\dfrac{e^{t-1}}{t}\geqslant 1$恒成立,

于是若要$\dfrac{e^{t-1}}{t}\geqslant a$ 恒成立,则$a\leqslant 1$,即$a\in(-\infty,1]$. ………………………………………… 12分

22.【命题意图】考查极坐标与参数方程、极坐标与直角坐标的转化,考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)将$C_1$的参数方程两边同时平方并相减,得$x^2-y^2=1$,

故曲线$C_1$的直角坐标方程为$x^2-y^2=1$.

将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入$C_2$的极坐标方程,得$y=x+2$.

故$C_1$的直角坐标方程为$x^2-y^2=1$,$C_2$的直角坐标方程为$y=x+2$. ………………………………………… 4分



(2)由(1)可得$C_1$的直角坐标方程为$x^2-y^2=1$,$C_2$的直角坐标方程为$y=x+2$,

联立$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ y=x+2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-\dfrac{5}{4},\\ y=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

故$C_1$与$C_2$公共点的直角坐标为$\left(-\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{4}\right)$. ………………………………………… 10分

23.【命题意图】考查均值不等式,考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)由均值不等式得$a^2+b^2\geqslant 2\times\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$,

当且仅当$a=b=\dfrac{1}{2}$时取等号. ………………………………………… 4分

(2)由均值不等式得$a+b=a+\dfrac{1}{2}b+\dfrac{1}{2}b\geqslant 3\sqrt[3]{a\cdot\left(\dfrac{1}{2}b\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}b\right)}$,

从而$ab^2\leqslant\dfrac{4}{27}$,

当且仅当$a=\dfrac{1}{3},b=\dfrac{2}{3}$时取等号. ………………………………………… 10分