机密★启用前(全国卷文科数学)

华大新高考联盟2022届高三11月教学质量测评

文科数学参考答案和评分标准

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	B	D	C	D	C	C	B	A	A	C

1.【答案】C

【命题意图】考查共轭复数的运算,考查数学运算等数学核心素养.

【解析】$\because \bar{z}=-i+2$, $\therefore z$的虚部为-1.

2.【答案】B

【命题意图】考查集合的表示法、元素与集合的关系、集合的基本运算,考查数学抽象等数学核心素养.

【解析】$\because A\cup B=\{1,2,3,5,7\}$, $\therefore \complement_U(A\cup B)=\{4,6\}$.

3.【答案】B

【命题意图】考查简易逻辑、命题的真假及不等式恒成立问题,考查逻辑推理等数学核心素养.

【解析】命题p: $\forall x\in\mathbf{R}$, $x^2-2x-a>0$为真命题时,$a<(x^2-2x)_{\min}$,即$a<-1$,故命题p: $\forall x\in\mathbf{R}$, $x^2-2x-a>0$为假命题时,$a\geqslant -1$.

4.【答案】D

【命题意图】考查线线平行、线面平行、线面垂直,考查直观想象等数学核心素养.

【解析】对于选项A,若$m/\!/\alpha$, $n/\!/\alpha$,则m与n可能平行,可能相交,可能异面,故选项A错误;

对于选项B,若$m\perp\alpha$, $n\perp\alpha$,则$m/\!/n$,故选项B错误;

对于选项C,当$n\subset\alpha$时不满足$n/\!/\alpha$,故选项C错误;

综上可知选项D正确.

5.【答案】C

【命题意图】考查几何概型、解不等式,考查数学运算等数学核心素养.

【解析】不等式$-x^2+5x-6\geqslant 0$的解为$2\leqslant x\leqslant 3$,由几何概型得所示概率为$\frac{1}{7}$.

6.【答案】D

【命题意图】考查圆锥和球的表面积,考查直观想象、数学建模等数学核心素养.

【解析】由三视图可知,该不倒翁上半部分是一个圆锥,底面半径为r,高为r,母线长为$\sqrt{2}r$;下半部分是一个半球,半径为r.

于是不倒翁的表面积为$\pi\cdot r\cdot\sqrt{2}r+\frac{1}{2}\cdot 4\pi r^2=(2+\sqrt{2})\pi r^2$.

7.【答案】C

【命题意图】考查三角函数两角和、差公式,考查逻辑推理、数学运算等数学核心素养.

【解析】由题可知$f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos x=\sqrt{3}\sin x-\cos x+\cos x=\sqrt{3}\sin x$,

故$f(x)$零点为$x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

8.【答案】C

【命题意图】考查切线方程、函数求导，考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x-y+1=0$，

所以 $f(1)=2, f'(1)=1$，

进而可得 $\begin{cases}1+a+b=2,\\3+2a=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2,\end{cases}$

故 $f(x)=x^3-x^2+2, f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$.

由 $f'(x)>0$，解得 $x<0$ 或 $x>\frac{2}{3}$；由 $f'(x)<0$，解得 $0<x<\frac{2}{3}$.

故 $f(x)$ 在 $x\in(-\infty,0]$ 上单调递增，在 $x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$ 上单调递减，在 $x\in\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，$f(x)_{极大值}=f(0)=2$.

9.【答案】B

【命题意图】考查三角函数图象的伸缩、平移变换，考查逻辑推理、数学运算等数学核心素养.

【解析】将 $y=\sin x$ 的图象纵坐标不变，横坐标缩短至原来的 $\frac{1}{2}$ 得到 $y=f(x)$ 的图象，故 $f(x)=\sin 2x$，

将 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得 $g(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x$.

10.【答案】A

【命题意图】考查圆的性质、直线与圆的位置关系，考查逻辑推理、数学运算等数学核心素养.

【解析】点 P 在圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 上，点 Q 在直线 $x-y+1=0$ 上，故 $|PQ|$ 的最小值可以转化为圆心到直线的距离减去半径，即 $|PQ|_{\min}=\frac{|1-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}-1=\sqrt{2}-1$.

11.【答案】A

【命题意图】考查二次函数、对数函数、导数，考查数学建模、数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】取 $f(x)=\ln x, g(x)=x^2-x, h(x)=x^2-1$，现比较 $f(\sqrt{1.01}), g(\sqrt{1.01}), h(\sqrt{1.01})$ 的大小，

设 $F(x)=f(x)-g(x)=\ln x-(x^2-x)=\ln x-x^2+x$，则 $F(1)=0$，

当 $x>1$ 时，$F'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=-\frac{(x-1)(2x+1)}{x}<0$，所以 $F(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递减，

于是当 $x>1$ 时，$F(x)<F(1)=0$，故当 $x>1$ 时，$f(x)<g(x)$，从而 $f(\sqrt{1.01})<g(\sqrt{1.01})$，即 $a<b$.

设 $H(x)=g(x)-h(x)=(x^2-x)-(x^2-1)=1-x, H(1)=0$，

当 $x>1$ 时，$H(x)<0$，故当 $x>1$ 时，$g(x)<h(x)$，从而 $g(\sqrt{1.01})<h(\sqrt{1.01})$，即 $b<c$.

综上，$a<b<c$.

12.【答案】C

【命题意图】考查抛物线的性质、直线与抛物线的位置关系，考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】直线 AB 的方程为 $2y=p(1+x)$，即 $px-2y+p=0$，

点 M 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|p-2\times2+p|}{\sqrt{p^2+(-2)^2}}=\frac{|2p-4|}{\sqrt{p^2+4}}$，

设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，联立直线 AB 与抛物线 $\begin{cases}px-2y+p=0,\\y^2=2px,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-4y+2p=0$，

由 $\Delta>0$ 得 $p<2$.

由韦达定理得 $\begin{cases}y_1+y_2=4,\\y_1y_2=2p.\end{cases}$

所以弦长$|AB|=\sqrt{\left(1+\frac{4}{p^2}\right)(16-8p)}=2\sqrt{\frac{p^2+4}{p^2}(4-2p)}$.

故$S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{\sqrt{(4-2p)^3}}{p}$.

由题目条件$S_{\triangle MAB}=\frac{\sqrt{(4-2p)^3}}{p}\leqslant 2\sqrt{2}$,

整理得$p^3-5p^2+12p-8\geqslant 0$,即$(p-1)(p^2-4p+8)\geqslant 0$,故$p\geqslant 1$.

结合$p<2$得$1\leqslant p<2$.

二、填空题

13.【答案】2.

【命题意图】考查直线与圆的位置关系、双曲线的渐近线和离心率,考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】由题可知$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,故$b^2=3a^2=c^2-a^2$,$\therefore e=2$.

14.【答案】$-\frac{1}{2}$.

【命题意图】考查平面向量,考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】$\because \boldsymbol{a}=(-1,1)$,$\boldsymbol{b}=(2,3)$,$\therefore \boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(-1+2\lambda,1+3\lambda)$,$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-4,-1)$.

又$\because \boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\,//\,2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\therefore -(-1+2\lambda)=-4(1+3\lambda)$,解得$\lambda=-\frac{1}{2}$.

15.【答案】$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

【命题意图】考查解三角形及平面向量,考查数学建模、数学抽象等数学核心素养.

【解析】由题可知$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{BN}$所成角即为$\angle MPN$,

$$\text{故}|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\times 2^2+\frac{1}{4}\times 5^2+\frac{1}{2}\times 2\times 5\times\frac{7}{20}}=3,$$

$$|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2}=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}=\sqrt{2^2+\frac{1}{4}\times 5^2-2\times 5\times\frac{7}{20}}=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=-\frac{1}{2}\times 2^2+\frac{1}{4}\times 5^2-\frac{1}{4}\times 2\times 5\times\frac{7}{20}=\frac{27}{8},$$

$$\therefore \cos\angle MPN=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

16.【答案】82.

【命题意图】考查数列、通项公式,考查数学运算、逻辑推理、数据分析等数学核心素养.

【解析】倒推可得:

$1\leftarrow 2\leftarrow 4\leftarrow 8\leftarrow 16\leftarrow 5\leftarrow 10\leftarrow 3\leftarrow 6\leftarrow 12$,

$1\leftarrow 2\leftarrow 4\leftarrow 8\leftarrow 16\leftarrow 5\leftarrow 10\leftarrow 20\leftarrow 40\leftarrow 13$,

$1\leftarrow 2\leftarrow 4\leftarrow 8\leftarrow 16\leftarrow 5\leftarrow 10\leftarrow 20\leftarrow 40\leftarrow 80$,

$1\leftarrow 2\leftarrow 4\leftarrow 8\leftarrow 16\leftarrow 32\leftarrow 64\leftarrow 128\leftarrow 256\leftarrow 512$,

$1\leftarrow 2\leftarrow 4\leftarrow 8\leftarrow 16\leftarrow 32\leftarrow 64\leftarrow 128\leftarrow 256\leftarrow 85$,

$1\leftarrow2\leftarrow4\leftarrow8\leftarrow16\leftarrow32\leftarrow64\leftarrow21\leftarrow42\leftarrow84$.

故 m 的所有可能取值为 12,13,80,84,85,512,中位数为 82.

三、解答题

17.【命题意图】考查数列的通项公式、叠乘法、错位相减法、数列的前 n 项和,考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)由题可知 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$,

迭代可得 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{1},\frac{a_3}{a_2}=\frac{3}{2},\cdots,\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}$,

又 $a_1=1$,∴累乘得 $a_n=n$,

经检验,$a_1=1$ 满足 $a_n=n$,故 $a_n=n$. ………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可得 $a_n=n$,故 $b_n=n\cdot2^n$,

记 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$,

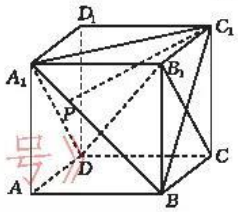
则 $T_n=1\times2^1+2\times2^2+\cdots+(n-1)\times2^{n-1}+n\times2^n$. ①

由①×2 得 $2T_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+(n-1)\times2^n+n\times2^{n+1}$. ②

由①−②得 $-T_n=1\times2^1+1\times2^2+1\times2^3+\cdots+1\times2^n-n\times2^{n+1}=2^{n+1}-2-n\times2^{n+1}$.

故 $T_n=(n-1)\times2^{n+1}+2$. ………………………………………………………… 12 分

18.【命题意图】考查空间中线线、线面、面面的位置关系,点到平面的距离,考查直观想象、逻辑推理等数学核心素养.



第 18 题图

【解析】(1)如图,连接 A_1D,B_1C,A_1C_1,

∵$A_1B_1\perp$平面 B_1BCC_1,$BC_1\subset$平面 B_1BCC_1,∴$A_1B_1\perp BC_1$.

∵$B_1C\perp BC_1$,$A_1B_1\cap B_1C=B_1$,$A_1B_1\subset$平面 A_1B_1CD,$B_1C\subset$平面 A_1B_1CD,

∴$BC_1\perp$平面 A_1B_1CD.

又∵$B_1D\subset$平面 A_1B_1CD,∴$BC_1\perp B_1D$.

同理可得 $A_1B\perp B_1D$.

又∵$A_1B\cap BC_1=B$,$A_1B\subset$平面 A_1BC_1,$BC_1\subset$平面 A_1BC_1,

∴$B_1D\perp$平面 A_1BC_1,

故 $B_1D\perp$平面 BC_1P. ………………………………………………………… 6 分

(2)设 B_1 到平面 A_1BC_1 的距离为 d,

∵$V_{三棱锥B_1-A_1BC_1}=V_{三棱锥A_1-B_1BC_1}$,∴$\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1BC_1}\times d=\frac{1}{3}\times S_{\triangle B_1BC_1}\times|A_1B_1|$,

故 $d=\frac{S_{\triangle B_1BC_1}\times|A_1B_1|}{S_{\triangle A_1BC_1}}=\frac{\frac{1}{2}\times1\times1\times1}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{1^2+1^2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

故点 B_1 到平面 BC_1P 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………………… 12 分

19.【命题意图】考查均值、方差,考查数据分析、数学运算等数学核心素养.

【解析】(1)设前 4 轮得分的均值、后 3 轮得分的均值分别为 E_1,E_2,由题可知:

前 4 轮的均值 $E_1=10+\frac{1}{8}\times\left(\frac{5}{10}+\frac{4}{10}+\frac{8}{10}+\frac{9}{10}+\frac{2}{10}+\frac{8}{10}+\frac{0}{10}+\frac{6}{10}\right)=10+\frac{21}{40}=\frac{421}{40}$,

后 3 轮的均值 $E_2=10+\frac{1}{6}\times\left(\frac{6}{10}+\frac{5}{10}+\frac{7}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}+\frac{-2}{10}\right)=10+\frac{29}{60}=\frac{629}{60}$.

因为 $E_1-E_2=\left(10+\frac{21}{40}\right)-\left(10+\frac{29}{60}\right)=\frac{21}{40}-\frac{29}{60}=\frac{1}{24}>0$,所以 $E_1>E_2$,

故该选手在淘汰阶段(前4轮)的发挥状态更好. …………………………………… 4分

(2)由(1)可得 $\bar{x}=\frac{629}{60}\approx10.48$,

故 $s^2=\frac{1}{6}\times\left[\left(\frac{6}{10}-\frac{29}{60}\right)^2+\left(\frac{5}{10}-\frac{29}{60}\right)^2+\left(\frac{7}{10}-\frac{29}{60}\right)^2+\left(\frac{6}{10}-\frac{29}{60}\right)^2+\left(\frac{7}{10}-\frac{29}{60}\right)^2+\left(-\frac{2}{10}-\frac{29}{60}\right)^2\right]$

$=\frac{1}{6}\times\frac{49+1+169+49+169+1681}{3600}=\frac{353}{3600}$,

于是 $s=\frac{\sqrt{353}}{60}\approx0.31$,

$\bar{x}-2s\approx10.48-2\times0.31=9.86$,

$\bar{x}+2s\approx10.48+2\times0.31=11.10$,

故 $[\bar{x}-2s,\bar{x}+2s]\approx[9.86,11.10]$,

因为 $9.8<9.86$,所以该选手最后一枪在后3轮的6个数据中不是正常发挥. ………………… 12分

20.【命题意图】考查直线与椭圆的位置关系,求解解析几何问题的一般方法,一元二次方程根与系数的关系,考查直观想象、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)由题可知 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\2c=2\sqrt{3},\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=1,\\c=\sqrt{3}.\end{cases}$

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………… 4分

(2)方法一 设圆 O 的半径为 r, $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,

当切线斜率存在时,设切线方程为 $y=kx+m$,

∵直线与圆 O 相切,∴ $\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=r$,即 $\frac{m^2}{k^2+1}=r^2$.

联立切线与椭圆方程 $\begin{cases}kx-y+m=0,\\\frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$,

∵ $\Delta=16(4k^2+1-m^2)>0$,

∴由韦达定理得 $x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+1}$, $x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{4k^2+1}$.

∵ $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$,

∴ $y_1y_2=\frac{m^2-4k^2}{4k^2+1}$.

∵ $OM\perp ON$,

∴ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=0$,

∴ $\frac{4m^2-4}{4k^2+1}+\frac{m^2-4k^2}{4k^2+1}=0$,即 $5m^2=4(k^2+1)$,

结合 $\frac{m^2}{k^2+1}=r^2$,有 $r^2=\frac{4}{5}$,检验满足 $\Delta>0$,

此时圆的方程为 $x^2+y^2=\frac{4}{5}$.

当斜率不存在时，$x^2+y^2=\frac{4}{5}$的切线方程为$x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$，满足题意，

故圆的方程为$x^2+y^2=\frac{4}{5}$.

当斜率存在时，$|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{4\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{4k^2+1-m^2}}{4k^2+1}$

$$=\frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{(k^2+1)(16k^2+1)}{(4k^2+1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{16k^4+17k^2+1}{16k^4+8k^2+1}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{1+\frac{9k^2}{16k^4+8k^2+1}},$$

当$k=0$时，$|MN|=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

当$k\neq0$时，$|MN|=\frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{1+\frac{9}{16k^2+8+\frac{1}{k^2}}}$.

设$t=16k^2+8+\frac{1}{k^2}$，$k^2\in(0,+\infty)$，

$\therefore t\in[16,+\infty)$.

于是$|MN|\in\left(\frac{4\sqrt{5}}{5},\sqrt{5}\right]$.

综上$|MN|$的取值范围是$\left[\frac{4\sqrt{5}}{5},\sqrt{5}\right]$. ………………………………………………………………………… 12分

方法二　设圆O的半径为r，切点为$P(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

当切线斜率存在且不为0时，直线OP的斜率为$k_{OP}=\frac{y_0}{x_0}$，

故切线斜率$k=-\frac{x_0}{y_0}$，切线方程为$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$，即$x_0x+y_0y-r^2=0$，

联立切线与椭圆方程$\begin{cases}x_0x+y_0y-r^2=0,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$消去$y$得$(4x_0^2+y_0^2)x^2-8x_0r^2x+4(r^4-y_0^2)=0$，

$\because\Delta=16y_0^2(4x_0^2+y_0^2-r^4)>0$，

$\therefore$由韦达定理得$x_1+x_2=\frac{8x_0r^2}{4x_0^2+y_0^2}$，$x_1x_2=\frac{4(r^4-y_0^2)}{4x_0^2+y_0^2}$，

$\therefore y_1y_2=\left(-\frac{x_0}{y_0}x_1+\frac{r^2}{y_0}\right)\left(-\frac{x_0}{y_0}x_2+\frac{r^2}{y_0}\right)=\frac{x_0^2}{y_0^2}x_1x_2-\frac{x_0r^2}{y_0^2}(x_1+x_2)+\frac{r^4}{y_0^2}=\frac{r^4-4x_0^2}{4x_0^2+y_0^2}$.

$\because OM\perp ON$，

$\therefore\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=0$，

$\therefore\frac{4(r^4-y_0^2)}{4x_0^2+y_0^2}+\frac{r^4-4x_0^2}{4x_0^2+y_0^2}=0$，

结合$x_0^2+y_0^2=r^2$，解得$r^2=\frac{4}{5}$，检验满足$\Delta>0$，

$\therefore$圆的方程为$x^2+y^2=\frac{4}{5}$.

当斜率不存在或斜率为0时，$x^2+y^2=\frac{4}{5}$的切线方程为$x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$，或$y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$，满足题意.

此时$|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\dfrac{4\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sqrt{4x_0^2+y_0^2-r^4}}{4x_0^2+y_0^2}$

$$=\frac{4\sqrt{\frac{4}{5}}\sqrt{3x_0^2+\frac{4}{5}-\frac{16}{25}}}{3x_0^2+\frac{4}{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3x_0^2+\frac{4}{25}}}{3x_0^2+\frac{4}{5}}.$$

设$t=\sqrt{3x_0^2+\frac{4}{25}}$,故$t\in\left[\frac{2}{5},\frac{8}{5}\right]$,

$\therefore |MN|=\dfrac{8}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{t}{t^2+\frac{16}{25}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{t+\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{t}}$,$t\in\left[\frac{2}{5},\frac{8}{5}\right]$,

$\therefore |MN|\in\left[\dfrac{4\sqrt{5}}{5},\sqrt{5}\right]$,

故$|MN|$的取值范围是$\left[\dfrac{4\sqrt{5}}{5},\sqrt{5}\right]$. ………………………………………………………… 12分

21.【命题意图】考查导数、函数的单调性、不等式恒成立问题,考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)当$a=1$时,$f(x)=e^{x-1}-\ln x-1$,定义域为$(0,+\infty)$,

$\therefore f'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$.记$g(x)=f'(x)$,则$g'(x)=e^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}>0$,

故$f'(x)$在$x\in(0,+\infty)$上单调递增.

$\because f'(1)=0$,

$\therefore$当$x\in(0,1)$时,$f'(x)<0$;当$x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$.

故$f(x)$在$x\in(0,1)$上单调递减,在$x\in(1,+\infty)$上单调递增. ………………………………… 4分

(2)若要$f(x)\geqslant 0$,只需$e^{x-1}-\ln x-1+x\geqslant ax$,

即需要$\dfrac{e^{x-1}}{x}-\dfrac{\ln x+1}{x}+1\geqslant a$恒成立,

即需要$e^{x-\ln x-1}+\dfrac{x-\ln x-1}{x}\geqslant a$恒成立,

设$t(x)=x-\ln x-1$,$x\in(0,+\infty)$,

则$t'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

由$t'(x)>0$得$x>1$;由$t'(x)<0$得$0<x<1$.

故$t(x)$在$x\in(0,1)$上单调递减,在$x\in(1,+\infty)$上单调递增.

又$t(1)=0$,故$t(x)\geqslant 0$,

于是$e^{x-\ln x-1}\geqslant e^0=1$且$\dfrac{x-\ln x-1}{x}\geqslant 0$($x=1$时取等号),

故$e^{x-\ln x-1}+\dfrac{x-\ln x-1}{x}\geqslant 1$.

于是对任意$a\leqslant 1$,$e^{x-\ln x-1}+\dfrac{x-\ln x-1}{x}\geqslant a$恒成立,即当$a\leqslant 1$时,$f(x)\geqslant 0$恒成立. ……………… 12分

22.【命题意图】考查极坐标与参数方程、极坐标与直角坐标的转化,考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)将C_1的参数方程两边同时平方并相减,得$x^2-y^2=1$,

故曲线C_1的直角坐标方程为$x^2-y^2=1$.

将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入 C_2 的极坐标方程得 $y=x+2$.

故 C_1 的直角坐标方程为 $x^2-y^2=1$,C_2 的直角坐标方程为 $y=x+2$. ······································ 4分

(2)由(1)可得 C_1 的直角坐标方程为 $x^2-y^2=1$,C_2 的直角坐标方程为 $y=x+2$,

联立方程组$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\y=x+2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-\dfrac{5}{4},\\y=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

故 C_1 与 C_2 公共点的直角坐标为$\left(-\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{4}\right)$. ······································ 10分

23.【命题意图】考查均值不等式,考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)由均值不等式得

$a^2+b^2\geqslant 2\times\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$,当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$时取等号. ······································ 4分

(2)由均值不等式得 $a+b=a+\dfrac{1}{2}b+\dfrac{1}{2}b\geqslant 3\sqrt[3]{a\cdot\left(\dfrac{1}{2}b\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}b\right)}$,

从而 $ab^2\leqslant\dfrac{4}{27}$,当且仅当 $a=\dfrac{1}{3}$,$b=\dfrac{2}{3}$时取等号. ······································ 10分