机密★启用前（全国卷文科数学）

华大新高考联盟 2022 届高三 1 月教学质量测评

文科数学参考答案和评分标准

扫码关注　查询成绩

一、选择题

1.【答案】B

【命题意图】本题考查复数的运算、复数的概念，考查数学运算、数学建模、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}=-\sqrt{3}-\mathrm{i}$，故所求共轭复数为$-\sqrt{3}+\mathrm{i}$，故选 B.

2.【答案】C

【命题意图】本题考查集合的运算、一元二次不等式的解法，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$U=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,(x+3)(x-4)<0\}=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,-3<x<4\}=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，故 $\complement_U A=\{-2,-1,2\}$，则$(\complement_U A)\cup B=\{-2,-1,0,2\}$，故选 C.

3.【答案】C

【命题意图】本题考查统计图表、古典概型的概率，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】2021 年 10 月份，全国居民消费价格的同比和环比的涨幅均为正数，故①正确；2020 年 10 月至 2021 年 10 月，全国居民消费价格同比增涨的月份有 10 个，下跌的月份有 3 个，故②错误，故③正确；故选 C.

4.【答案】D

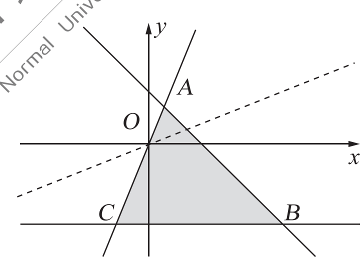
【命题意图】本题考查全称命题与特称命题、复合命题的真假判定，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】方程 $x^2+6x+10=0$ 的 $\Delta=36-4\times10=-4<0$，故 $x^2+6x+10=0$ 无解，则命题 p 为假；而 $\sin2x+\cos2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}<\frac{3}{2}$，故命题 q 为真；故命题 $p\wedge q$、$p\vee\neg q$、$\neg p\wedge\neg q$ 均为假命题，$\neg p\wedge q$ 为真命题，故选 D.

5.【答案】B

【命题意图】本题考查二元一次不等式组与平面区域、线性规划，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】作出不等式组所表示的平面区域如图阴影部分所示. 观察可知，当直线 $z=2x-5y$ 过点 B 时，z 有最大值；联立$\begin{cases}x+y=2,\\y+3=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=5,\\y=-3,\end{cases}$则 $z=2x-5y$ 的最大值为 25，故选 B.



6.【答案】B

【命题意图】本题考查指对数的大小比较，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$a=\log_{1.5}3.1\in(1,+\infty)$，$b=\log_5 0.1\in(-\infty,0)$，$c=\frac{\log_4 16}{\log_2 \mathrm{e}^2}=\frac{2}{\log_2 \mathrm{e}^2}=\ln2\in(0,1)$，故 $a>c>b$，故选 B.

7.【答案】D

【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$A=2$，$\frac{3T}{4}=\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}$，则 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，则 $\omega=2$，故 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)$；而 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，

故$\dfrac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则$\varphi=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，由$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，则$\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，$f(x)=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$；将函数$f(x)$图象的横坐标伸长到原来的 6 倍后，得到$y=2\cos\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，再向左平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位后，得到$g(x)=2\cos\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，故函数$g(x)$在$[-6\pi,-5\pi]$上先增后减，在$[2\pi,4\pi]$上先减后增，在$[4\pi,6\pi]$上单调递增，在$[-4\pi,-3\pi]$上单调递减，故选 D.

8.【答案】C

【命题意图】本题考查空间几何体的表面积与体积，考查数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】设$MN=2a$，则二十四等边体的外接球半径为$2a$，其外接球体积为$\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\times(2a)^3=\dfrac{32}{3}\pi a^3$，二十四等边体可以看成一个长方体加上四个四棱锥拼接而成的几何体，故所求体积$V=2a\times2a\times2\sqrt{2}a+\dfrac{4}{3}\times a\times2a\times2\sqrt{2}a=\dfrac{40\sqrt{2}}{3}a^3$，故二十四等边体的体积与其外接球体积之比为$\dfrac{5\sqrt{2}}{4\pi}$，故选 C.

9.【答案】B

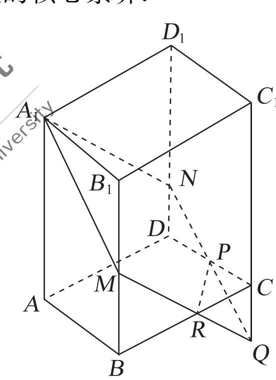
【命题意图】本题考查双曲线的方程与性质，考查直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】依题意，得$F_2(c,0)$，故$\overrightarrow{F_2A}=(-c,2b)$，$\overrightarrow{F_2P}=4\overrightarrow{F_2A}=(-4c,8b)$，则$P(-3c,8b)$，代入$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$中，得$\dfrac{(-3c)^2}{a^2}-\dfrac{(8b)^2}{b^2}=1$，得$\dfrac{9c^2}{a^2}=65$，即$\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{56}{9}$，则$\dfrac{b}{a}=\dfrac{2\sqrt{14}}{3}$，则双曲线$C$的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{2\sqrt{14}}{3}x$，故选 B.

10.【答案】B

【命题意图】本题考查空间几何体的结构特征，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】作出图形如图所示. 延长C_1C至Q，使得$CQ=1$，连接MQ,NQ，则四边形A_1MQN为平行四边形；记MQ与BC交于点R，NQ与CD交于点P，则$A_1N=4\sqrt{2}$，$A_1M=5$，$MR=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，$NP=\sqrt{2^2+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2}=\dfrac{10}{3}$，$PR=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2}=\dfrac{5}{3}$，故所得截面的周长为$10+7\sqrt{2}$，故选 B.



11.【答案】D

【命题意图】本题考查数学的实际应用，考查数学抽象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$f*(20)=1$，$f*(16)=0$，故 A 正确；因为$154=2\times7\times11$，故$154=1\times154$，$154=2\times77$，$154=7\times22$，$154=11\times14$，观察可知，B 正确；因为$4^i=2^{2i}=2^i\cdot2^i$，$i\in\mathbf{N}^*$，故$f*(4^i)=0$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}f*(4^i)=0$，故 C 正确；$\sum\limits_{i=1}^{10}f*(2i-1)=0+2+4+6+0+10+12+2+16+18=70$，故 D 错误，故选 D.

12.【答案】B

【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】依题意，$a\geqslant\dfrac{\ln x}{x}-x+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}$，设函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}$，则$f'(x)=\dfrac{-\ln x-x^2-3+\dfrac{4}{x}}{x^2}$，

令 $h(x)=-\ln x-x^2-3+\frac{4}{x}$，故 $h'(x)=-\frac{1}{x}-2x-\frac{4}{x^2}<0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，而 $h(1)=0$，故当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，故函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $g(x)_{\max}=g(1)=1$，则 $a\geqslant 1$，故选 B.

二、填空题

13.【答案】4.

【命题意图】本题考查分层抽样，考查数学运算、数学建模的核心素养.

【解析】依题意，所有使用者的人数为 $\frac{900}{0.15}=6000$ 人，故年龄在 25—50 岁之间的用户所占比例为 $\frac{4500}{6000}=0.75$，则年龄在 25 岁以下的用户所占比例为 $1-0.15-0.75=0.1$，故所抽取的人数为 $40\times0.1=4$.

14.【答案】$\frac{\sqrt{2}}{10}$.

【命题意图】本题考查平面向量的坐标运算、平面向量数量积的应用，考查数学运算的核心素养.

【解析】依题意，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,2)$，故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为 $\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

15.【答案】$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sqrt{10}$.

【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】因为 $\tan 2\angle ABD=\frac{2\tan\angle ABD}{1-\tan^2\angle ABD}=\frac{4}{3}$，故 $\tan\angle ABD=\frac{1}{2}$（$\tan\angle ABD=-2$ 舍去）；而 $\begin{cases}\frac{\sin\angle ABD}{\cos\angle ABD}=\frac{1}{2},\\ \sin^2\angle ABD+\cos^2\angle ABD=1,\end{cases}$ 故 $\cos\angle ABD=\frac{2\sqrt{5}}{5}$；因为 $\triangle BCD$ 是等腰直角三角形，故 $\angle BCD=90^\circ$，$BC=2$，故 $BD=2\sqrt{2}$，$AD=BD\cdot\tan\angle ABD=\sqrt{2}$；在 $\triangle ACD$ 中，$\angle ACD=135^\circ$，由余弦定理得 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos 135^\circ}=\sqrt{10}$.

16.【答案】$-\frac{1}{2}$.

【命题意图】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆的综合性问题，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】设直线 l 的方程为 $y=kx+m\,(k<0,m>0)$，联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$，故 $\Delta=64k^2m^2-16(m^2-1)(1+4k^2)=0$，化简可得 $1+4k^2=m^2$；而 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{m}{k}\right|\cdot|m|=\frac{m^2}{2|k|}=\frac{1+4k^2}{2|k|}=\frac{1}{2}\left(4|k|+\frac{1}{|k|}\right)\geqslant\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{4|k|\cdot\frac{1}{|k|}}=2$，当且仅当 $k=-\frac{1}{2}$ 时等号成立，此时 $\triangle OMN$ 的面积最小.

三、解答题

17.【命题意图】本题考查回归直线方程及其应用，考查数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1) 依题意，得 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$，…………（1 分）

$\bar{y}=\frac{15+18+27+23+20+29+36}{7}=24$，…………（2 分）

$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-3)\times(-9)+(-2)\times(-6)+(-1)\times3+1\times(-4)+2\times5+3\times12=78$，

…………（4 分）

$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+1^2+2^2+3^2=28$，……（5 分）

$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{39}{14}$，……（7 分）

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=24-\dfrac{39}{14}\times4=\dfrac{90}{7}$，故所求回归直线方程为 $\hat{y}=\dfrac{39}{14}x+\dfrac{90}{7}$.……（8 分）

（2）将 $x=9$ 代入 $\hat{y}=\dfrac{39}{14}x+\dfrac{90}{7}$ 中，得 $y=\dfrac{39}{14}\times9+\dfrac{90}{7}=\dfrac{531}{14}\approx37.93$，……（10 分）

故可以预测小强第 9 次的慢跑时间为 37.93 分钟.……（12 分）

18.【命题意图】本题考查等差数列的通项公式以及前 n 项和公式、分组求和法，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】（1）依题意，$S_5=5a_3=25$，则 $a_3=5$，……（1 分）

故 $a_2+a_5+a_{10}=a_3-d+a_3+2d+a_3+7d=31$，……（2 分）

解得 $d=2$，……（3 分）

故 $a_1=a_3-2d=1$，……（4 分）

故 $a_n=2n-1$，……（5 分）

$S_n=\dfrac{1+2n-1}{2}\cdot n=n^2$.……（7 分）

（2）依题意，$b_n=a_{n+2}+4^n=(2n+3)+4^n$，……（8 分）

故 $T_n=5+4^1+7+4^2+9+4^3+\cdots+(2n+3)+4^n$

$=\dfrac{(5+2n+3)\cdot n}{2}+\dfrac{4^1(1-4^n)}{1-4}=n^2+4n+\dfrac{4^{n+1}-4}{3}$.……（12 分）

19.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、空间几何体的表面积与体积，考查直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】（1）因为 $B_1C\perp$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，故 $B_1C\perp AC$，……（1 分）

因为 $AC=\sqrt{2}$，$AB=2$，$\angle BAC=45°$，

由余弦定理，$BC=\sqrt{AC^2+AB^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC}=\sqrt{2}$，……（2 分）

故 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $AC\perp BC$；……（3 分）

又 $BC\cap B_1C=C$，故 $AC\perp$ 平面 BCC_1B_1；……（4 分）

而 $BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，故 $AC\perp BC_1$.……（5 分）

（2）依题意，CD 的最小值即为点 C 到平面 ABB_1A_1 的距离 h，

因为 $B_1C\perp$ 平面 ABC，故 $B_1C\perp AC$，$B_1C\perp BC$，……（7 分）

则 $AB_1=2$，$BB_1=2$，又 $AB=2$，故 $\triangle ABB_1$ 为等边三角形，

则 $S_{\triangle ABB_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\sqrt{3}$，……（9 分）

故 $V_{C-ABB_1A_1}=2V_{C-ABB_1}=2V_{B_1-ABC}=2\times\dfrac{1}{3}\times B_1C\times S_{\triangle ABC}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

而 $V_{C\text{-}ABB_1A_1}=\dfrac{1}{3}\times h\times S_{\square ABB_1A_1}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}h$，故 $h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.……（12 分）

20.【命题意图】（1）本题考查抛物线的定义、抛物线的方程、直线与抛物线的综合性问题，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的数学素养.

【解析】（1）设直线 l：$y=k\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$；……（1 分）

联立$\begin{cases}y^2=2px,\\ y=2\left(x-\frac{p}{2}\right),\end{cases}$则$4\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=2px$，故$4\left(x^2-px+\frac{p^2}{4}\right)=2px$，

即$4x^2-6px+p^2=0$，……………………………………………………………………（3分）

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，故$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=\frac{5}{2}p=15$，解得$p=6$，

故抛物线C的方程为$y^2=12x$. ……………………………………………………（5分）

(2)因为$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=|FD|^2\cdot\cos\angle AFB$，故$|FA|\cdot|FB|=|FD|^2$；

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}y^2=2px,\\ y=k(x-m),\end{cases}$消去$y$得$k^2x^2-2(k^2m+p)x+k^2m^2=0$，

显然$k\neq0$，因为$m>0$，$p>0$，故$\Delta>0$，而$\begin{cases}x_1+x_2=2m+\frac{2p}{k^2},\\ x_1x_2=m^2,\end{cases}$ ……………………………（7分）

故$D\left(-\frac{p}{2},-k\left(m+\frac{p}{2}\right)\right)$，从而$|FD|^2=p^2+k^2\left(m+\frac{p}{2}\right)^2$，……………………………（8分）

由抛物线定义可知，$|FA|=x_1+\frac{p}{2}$，$|FB|=x_2+\frac{p}{2}$，

故$|FA|\cdot|FB|=\left(x_1+\frac{p}{2}\right)\left(x_2+\frac{p}{2}\right)=x_1x_2+\frac{p}{2}(x_1+x_2)+\frac{p^2}{4}=\left(m+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{k^2}$，

由$|FA|\cdot|FB|=|FD|^2$，得$\left(m+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{k^2}=p^2+k^2\left(m+\frac{p}{2}\right)^2$，

即$(k^2-1)\left[\left(m+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{k^2}\right]=0$，……………………………………………（11分）

因为$\left(m+\frac{p}{2}\right)^2>0$，$\frac{p^2}{k^2}>0$，故$k^2=1$，解得$k=\pm1$. ……………………………（12分）

21.【命题意图】本题考查导数的几何意义、利用导数研究函数的性质，考查数学运算、逻辑推理、数学抽象的核心素养.

【解析】(1)依题意，$f'(x)=\ln x+1-e^x$，…………………………………………………（1分）

故$f'(1)=1-e$，……………………………………………………………………（2分）

而$f(1)=1-e$，由点斜式可得，$y-(1-e)=(1-e)(x-1)$，……………………………（3分）

即曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y=(1-e)x$. ………………………………（4分）

(2)结论：$f(x)<\sin x$；证明如下：

要证$f(x)<\sin x$，只需证$x\ln x<e^x+\sin x-1$；……………………………………（5分）

当$0<x\leqslant1$时，因为$x\ln x\leqslant0$，$e^x+\sin x-1>0$，所以$x\ln x<e^x+\sin x-1$成立；………（6分）

当$x>1$时，设$h(x)=e^x+\sin x-x\ln x-1$，则$h'(x)=e^x+\cos x-\ln x-1$，…………………（7分）

记$h'(x)=u(x)$，则$u'(x)=e^x-\frac{1}{x}-\sin x$，…………………………………………（8分）

因为$x>1$，所以$u'(x)>e-1-1>0$，……………………………………………………（9分）

所以$u(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，$u(x)>u(1)=e+\cos1-1>0$，即$h'(x)>0$，……………（10分）

所以$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，故$h(x)>h(1)=e+\sin1-1>0$，

即$f(x)<\sin x$；………………………………………………………………………（11分）

综上所述，$f(x)<\sin x$. …………………………………………………………………（12分）

22.【命题意图】本题考查曲线的极坐标方程、曲线的参数方程以及直线参数方程的应用，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)依题意，得曲线 $C_1:(x-1)^2+y^2=1$， ……………………………………………………………(1 分)
令 $y=0$，解得 $x=2$，故 $A(2,0)$；…………………………………………………………………………(2 分)
而 $x^2-2x+y^2=0$，故 $x^2+y^2=2x$，即 $\rho^2=2\rho\cos\theta$， …………………………………………………(3 分)
故曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$. ……………………………………………………………………(4 分)
(2)依题意，得曲线 $C_3:x^2+y^2=1$，即 $\rho=1$.

当 $\theta_0=\frac{2\pi}{3}$时，点 B 的坐标为$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $k_{AB}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}-2}=-\frac{\sqrt{3}}{5}$，……………………………………………(7 分)

故可设直线 AB 的参数方程为$\begin{cases}x=2-\frac{5\sqrt{7}}{14}t,\\ y=\frac{\sqrt{21}}{14}t,\end{cases}$（$t$ 为参数），

代入 $x^2+y^2=1$ 并化简得 $t^2-\frac{10\sqrt{7}}{7}t+3=0$，…………………………………………………………(9 分)

设 B，D 所对的参数分别为 t_1，t_2，则 $|AB|\cdot|AD|=|t_1t_2|=3$. ……………………………………(10 分)

23.【命题意图】本题考查绝对值不等式的解法、绝对值不等式的性质，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，得 $|4x+2|-|4x+4|+\frac{1}{2}x<1$，

当 $x\leqslant-1$ 时，$-4x-2+4x+4+\frac{1}{2}x<1$，解得 $x<-2$，故 $x<-2$； ……………………………………(2 分)

当$-1<x<-\frac{1}{2}$时，$-4x-2-4x-4+\frac{1}{2}x<1$，解得 $x>-\frac{14}{15}$，故$-\frac{14}{15}<x<-\frac{1}{2}$；…………………(3 分)

当 $x\geqslant-\frac{1}{2}$时，$4x+2-4x-4+\frac{1}{2}x<1$，解得 $x<6$，故$-\frac{1}{2}\leqslant x<6$； …………………………(4 分)

故不等式 $f(x)+\frac{1}{2}x<1$ 的解集为$\left\{x\,\middle|\,x<-2\text{ 或}-\frac{14}{15}<x<6\right\}$. ……………………………(5 分)

(2)依题意，$f\left(\frac{1}{2}x\right)>m\Leftrightarrow|2x+a|-|2x+a^2|>m$，

而 $|2x+a|-|2x+a^2|\leqslant|2x+a-2x-a^2|=|a-a^2|$，故 $|a-a^2|>m$. ……………………………………(7 分)
令 $g(a)=|a-a^2|$，$a\in[0,2]$，
结合 $g(a)$的图象可知，$[g(a)]_{\max}=g(2)=2$，故 $m<2$，
故实数 m 的取值范围为$(-\infty,2)$. ……………………………………………………………………………(10 分)