机密★启用前(全国卷理科数学)

华大新高考联盟 2022 届高三 1 月教学质量测评

理科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】C

【命题意图】本题考查集合的运算、一元二次不等式的解法,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$A=\{x\mid x(2x-9)>0\}=\left\{x\,\middle|\,x<0\text{ 或 }x>\frac{9}{2}\right\}$,故 $\complement_U A=\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{9}{2}\right\}$,则 $(\complement_U A)\cap B=\left\{x\,\middle|\,1<x\leqslant\frac{9}{2}\right\}$,故选 C.

2.【答案】B

【命题意图】本题考查复数的运算、复数的概念,考查数学运算、数学建模、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$\mathrm{i}\cdot e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}=\mathrm{i}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{i}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$,故选 B.

3.【答案】D

【命题意图】本题考查全称命题与特称命题、复合命题的真假判定,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】方程 $x^2+6x+10=0$ 的 $\Delta=36-4\times10=-4<0$,故 $x^2+6x+10=0$ 无解,则命题 p 为假;而 $\sin2x+\cos2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}<\frac{3}{2}$,故命题 q 为真;故命题 $p\wedge q$、$p\vee\neg q$、$\neg p\wedge\neg q$ 均为假命题,$\neg p\wedge q$ 为真命题,故选 D.

4.【答案】C

【命题意图】本题考查统计图表、古典概型的概率,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】2021 年 10 月份,全国居民消费价格的同比和环比的涨幅均为正数,故①正确;2020 年 10 月至 2021 年 10 月,全国居民消费价格同比增涨的月份有 10 个,下跌的月份有 3 个,故②错误;从 2020 年 10 月至 2021 年 10 月的中任取 2 个月,全国居民消费价格的同比均呈现增涨的概率 $P=\frac{C_{10}^2}{C_{13}^2}=\frac{10\times9}{13\times12}=\frac{15}{26}$,故③正确;故选 C.

5.【答案】B

【命题意图】本题考查相互独立事件的概率,考查数学建模、数学运算的核心素养.

【解析】依题意,所求概率为 $1-\left(\frac{1}{3}\right)^4-C_4^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{72}{81}=\frac{8}{9}$,故选 B.

6.【答案】B

【命题意图】本题考查指对数的大小比较,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$a=\log_{1.5}3.1\in(1,+\infty)$,$b=\log_5 0.1\in(-\infty,0)$,$c=\frac{\log_4 16}{\log_2 e^2}=\frac{2}{\log_2 e^2}=\ln2\in(0,1)$,故 $a>c>b$,故选 B.

7.【答案】D

【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质,考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$A=2$,$\frac{3T}{4}=\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}$,则 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$,则 $\omega=2$,故 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)$;而 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$,

故$\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则$\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，由$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，则$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，$f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$；将函数$f(x)$图象的横坐标伸长到原来的6倍后，得到$y=2\cos\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)$，再向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位后，得到$g(x)=2\cos\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{4}\right)$，故函数$g(x)$在$[-6\pi,-5\pi]$上先增后减，在$[2\pi,4\pi]$上先减后增，在$[4\pi,6\pi]$上单调递增，在$[-4\pi,-3\pi]$上单调递减，故选D.

8.【答案】C

【命题意图】本题考查空间几何体的表面积与体积，考查数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】设$MN=2a$，则二十四等边体的外接球半径为$2a$，其外接球体积为$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times(2a)^3=\frac{32}{3}\pi a^3$，二十四等边体可以看成一个长方体加上四个四棱锥拼接而成的几何体，故所求体积$V=2a\times2a\times2\sqrt{2}a+\frac{4}{3}\times a\times2a\times2\sqrt{2}a=\frac{40\sqrt{2}}{3}a^3$，故二十四等边体的体积与其外接球体积之比为$\frac{5\sqrt{2}}{4\pi}$，故选C.

9.【答案】B

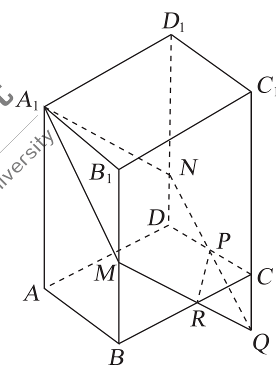
【命题意图】本题考查双曲线的方程与性质，考查直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】依题意，$A(a,0)$，$B(5a,0)$，则以AB为直径的圆D：$(x-3a)^2+y^2=4a^2$；而$\angle AMB=90^\circ$，故双曲线C的渐近线与圆D有交点，故圆心$D(3a,0)$到直线$bx-ay=0$的距离$d=\frac{3ab}{c}\leqslant2a$，则$3b\leqslant2c$，故$9c^2-9a^2\leqslant4c^2$，故$5c^2\leqslant9a^2$，则$1<\mathrm{e}=\frac{c}{a}\leqslant\frac{3\sqrt{5}}{5}$，故双曲线$C$的离心率的取值范围为$\left(1,\frac{3\sqrt{5}}{5}\right]$，故选B.

10.【答案】B

【命题意图】本题考查空间几何体的结构特征，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】作出图形如图所示. 延长C_1C至Q，使得$CQ=1$，连接MQ，NQ，则四边形A_1MQN为平行四边形；记MQ与BC交于点R，NQ与CD交于点P，则$A_1N=4\sqrt{2}$，$A_1M=5$，$MR=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，$NP=\sqrt{2^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{10}{3}$，$PR=\sqrt{1^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{5}{3}$，故所得截面的周长为$10+7\sqrt{2}$，故选B.



11.【答案】D

【命题意图】本题考查数学的实际应用，考查数学抽象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$f*(20)=1$，$f*(16)=0$，故A正确；因为$154=2\times7\times11$，故$154=1\times154$，$154=2\times77$，$154=7\times22$，$154=11\times14$，观察可知，B正确；因为$4^i=2^{2i}=2^i\cdot2^i$，$i\in\mathbf{N}^*$，故$f*(4^i)=0$，则$\sum_{i=1}^{n}f*(4^i)=0$，故C正确；$\sum_{i=1}^{10}f*(2i-1)=0+2+4+6+0+10+12+2+16+18=70$，故D错误，故选D.

12.【答案】C

【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】令$f(x)=\ln x-\frac{1}{2021}x$，故$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2021}=\frac{2021-x}{2021x}$，故当$x\in(0,2021)$时，$f'(x)>0$，当$x\in(2021,+\infty)$时，$f'(x)<0$，而$f(2021)>0$，不妨设$0<a<2021<b$，则$\frac{b}{a}=t(t>1)$；两式相减，可得

$2021\ln\dfrac{b}{a}=b-a$，则 $2021\ln t=a(t-1)$，则 $a=\dfrac{2021\ln t}{t-1}$，则 $b=at=\dfrac{2021t\ln t}{t-1}$，则 $ab=\dfrac{2021^2\cdot t(\ln t)^2}{(t-1)^2}$；令 $g(t)=t(\ln t)^2-(t-1)^2$，故 $g'(t)=(\ln t)^2+2\ln t-2t+2=h(t)$，则 $h'(t)=\dfrac{2}{t}(\ln t+1-t)$；令 $m(t)=\ln t+1-t$，故 $m'(t)=\dfrac{1}{t}-1<0$，故函数 $m(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $m(t)<m(1)=0$，则 $h'(t)=\dfrac{2}{t}(\ln t+1-t)<0$，故函数 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $h(t)<h(1)=0$，即 $g'(t)<0$，故函数 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $g(t)<g(1)=0$，故 $t(\ln t)^2-(t-1)^2<0$，即 $\dfrac{t(\ln t)^2}{(t-1)^2}<1$，故 $ab<2021^2$，故实数 λ 的取值范围为 $[2021^2,+\infty)$，故选 C.

二、填空题

13.【答案】$\dfrac{19}{5}$.

【命题意图】本题考查平面向量的坐标运算、向量垂直的坐标表示，考查数学运算的核心素养.

【解析】依题意，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,5)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(-4,3-\lambda)$；而 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$，故 $4+15-5\lambda=0$，解得 $\lambda=\dfrac{19}{5}$.

14.【答案】-560.

【命题意图】本题考查二项式定理的应用，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$(2\sqrt[4]{x^3}-x)^7$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_7^r(2x^{\frac{3}{4}})^{7-r}\cdot(-x)^r=C_7^r\cdot 2^{7-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{\frac{21+r}{4}}$；令 $\dfrac{21+r}{4}=6$，得 $r=3$，故 x^6 的系数为 $C_7^3\cdot 2^4\cdot(-1)^3=-560$.

15.【答案】$\dfrac{3\pi}{4}$，4.

【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】因为 $\dfrac{a\cos C+c\cos A}{\cos C}+\sqrt{2}b=0$，故 $a\cos C+c\cos A+\sqrt{2}b\cos C=0$，则 $\sin A\cos C+\sin C\cos A+\sqrt{2}\sin B\cos C=0$，故 $\sin(A+C)+\sqrt{2}\sin B\cos C=0$；因为 $A+C=\pi-B$，则 $\sin(A+C)=\sin B\neq 0$，则 $1+\sqrt{2}\cos C=0$，故 $\cos C=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $C=\dfrac{3\pi}{4}$；而 $b\sin\left(A+\dfrac{3\pi}{2}\right)-a\cos(B+\pi)=\dfrac{b\sin B}{\sin C}$，故 $ac\cos B-bc\cos A=b^2$，则 $ac\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b^2$，化简得 $a^2=2b^2$，则 $b=2\sqrt{2}$，故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=4$.

16.【答案】$(-\infty,3\sqrt{3}]$.

【命题意图】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆的综合性问题，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，得 $M(-2,0)$，$N(2,0)$. 设 $P(x_1,y_1)$，则 $Q(-x_1,-y_1)(x_1\neq\pm 2)$，$k_{MP}=\dfrac{y_1}{x_1+2}$，直线 MP 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，令 $x=0$，得 $y_A=\dfrac{2y_1}{x_1+2}$，即 $A\left(0,\dfrac{2y_1}{x_1+2}\right)$，又 $k_{MQ}=\dfrac{y_1}{x_1-2}$，直线 MQ 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x+2)$，令 $x=0$，得 $y_B=\dfrac{2y_1}{x_1-2}$，即 $B\left(0,\dfrac{2y_1}{x_1-2}\right)$；四边形 $MAFB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}|MF|\cdot|AB|=$

$\frac{3}{2}|AB|$，$|AB|=\left|\frac{2y_1}{x_1+2}-\frac{2y_1}{x_1-2}\right|=\left|\frac{8y_1}{x_1^2-4}\right|$. 因为点 P 在椭圆上且异于左、右顶点，所以 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$0<y_1\leqslant\sqrt{3}$，所以 $x_1^2-4=-\frac{4}{3}y_1^2$，所以 $|AB|=\frac{6}{y_1}$，所以当 $y_1=\sqrt{3}$ 时，$|AB|_{\min}=2\sqrt{3}$，所以四边形 $MAFB$ 面积的最小值为 $3\sqrt{3}$，则实数 λ 的取值范围为 $(-\infty,3\sqrt{3}]$.

三、解答题

17.【命题意图】本题考查样本的数字特征、回归直线方程及其应用，考查数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$(0.005+0.012+m+0.034+0.015+0.003)\times10=1$， ……………………(1 分)

解得 $m=0.031$. ……………………(2 分)

(2)①依题意，$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$，

$\bar{y}=\frac{15+18+27+23+20+29+36}{7}=24$， ……………………(3 分)

$\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-3)\times(-9)+(-2)\times(-6)+(-1)\times3+1\times(-4)+2\times5+3\times12=78$，

……………………(5 分)

$\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+1^2+2^2+3^2=28$， ……………………(6 分)

$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{39}{14}$， ……………………(7 分)

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=24-\frac{39}{14}\times4=\frac{90}{7}$，故所求回归直线方程为 $\hat{y}=\frac{39}{14}x+\frac{90}{7}$； ……………………(8 分)

②小明这 100 天慢跑的平均时间为：

$5\times0.05+15\times0.12+25\times0.31+35\times0.34+45\times0.15+55\times0.03=30.1$； ……………………(10 分)

将 $x=9$ 代入 $\hat{y}=\frac{39}{14}x+\frac{90}{7}$ 中，得 $y=\frac{39}{14}\times9+\frac{90}{7}\approx37.93>30.1$， ……………………(11 分)

故可以预测小强第 9 次的慢跑时间会超过小明这 100 天慢跑的平均时间. ……………………(12 分)

18.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、向量法求空间角，考查直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)延长 BA，CD 交于点 P'，连接 PP'，

则 PP' 即为平面 PAB 与平面 PCD 的交线 l. ……………………(1 分)

∵$AD/\!/BC$，$BC=2AD$，故在△$P'BC$ 中，A、D 分别为所在线段的中点，

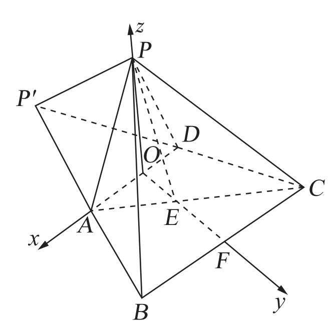
故 $P'A=AB=PA$；故 $P'P\perp PB$； ……………………(2 分)

同理可得，$P'P\perp PC$，

$PB\cap PC=P$，故 $P'P\perp$ 平面 PBC； ……………………(3 分)

而 $BC\subset$ 平面 PBC，故 $P'P\perp BC$，即 $l\perp BC$； ……………………(4 分)

而 $AD/\!/BC$，故 $l\perp AD$. ……………………(5 分)



(2)取 AD 的中点 O，取 BC 的中点 F，连接 OF，可知点 E 在线段 OF 上，故以 OA 所在直线为 x 轴，OE 所在直线为 y 轴，OP 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系； ……………………(6 分)

因为△PAD 是面积为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形，故 $AD=2$，

故 $P(0,0,\sqrt{3}),B(2,\sqrt{3},0),C(-2,\sqrt{3},0),E\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$,

故 $\overrightarrow{PE}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},-\sqrt{3}\right),\overrightarrow{PB}=(2,\sqrt{3},-\sqrt{3}),\overrightarrow{BC}=(-4,0,0)$, …………………………(8 分)

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,1)$,

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}2x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0,\\ -4x=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=1,\end{cases}$ 故 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$,

记 PE 与平面 PBC 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PE}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{PE}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, …………………………(10 分)

故所求余弦值为 $\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. …………………………(12 分)

19.【命题意图】本题考查等差数列的通项公式以及前 n 项和公式、分组求和法、裂项相消法,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意,$S_5=5a_3=25$,则 $a_3=5$, …………………………(1 分)

故 $a_2+a_5+a_{10}=a_3-d+a_3+2d+a_3+7d=31$, …………………………(2 分)

解得 $d=2$, …………………………(3 分)

故 $a_1=a_3-2d=1$, …………………………(4 分)

故 $a_n=2n-1$, …………………………(5 分)

$S_n=\frac{1+2n-1}{2}\cdot n=n^2$. …………………………(7 分)

(2)依题意,得 $\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)$, …………………………(8 分)

故 $b_n=\begin{cases}2^{2n-1},n\text{ 为奇数},\\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right),n\text{ 为偶数},\end{cases}$

故 $T_{2n-1}=2^1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+2^5+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-5}-\frac{1}{4n-1}\right)+2^{4n-3}$

$=2^1+2^5+\cdots+2^{4n-3}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{4n-5}-\frac{1}{4n-1}\right)=\frac{2^{4n+1}-2}{15}+\frac{n-1}{3(4n-1)}$. ……(12 分)

20.【命题意图】本题考查抛物线的定义、抛物线的方程、直线与抛物线的综合性问题,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的数学素养.

【解析】(1)设直线 $l:y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$; …………………………(1 分)

联立 $\begin{cases}y^2=2px,\\ y=2\left(x-\frac{p}{2}\right),\end{cases}$ 得 $4\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=2px$,故 $4\left(x^2-px+\frac{p^2}{4}\right)=2px$,

即 $4x^2-6px+p^2=0$, …………………………(3 分)

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,故 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=\frac{5}{2}p=15$,解得 $p=6$,

故抛物线 C 的方程为 $y^2=12x$. …………………………(5 分)

(2)因为 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=|FD|^2\cdot\cos\angle AFB$,故 $|FA|\cdot|FB|=|FD|^2$;

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}y^2=2px,\\ y=k(x-m),\end{cases}$ 消去 y 得 $k^2x^2-2(k^2m+p)x+k^2m^2=0$,

显然 $k\neq0$,因为 $m>0$,$p>0$,故 $\Delta>0$,而$\begin{cases}x_1+x_2=2m+\dfrac{2p}{k^2},\\x_1x_2=m^2,\end{cases}$ ……………………………… (7 分)

故 $D\left(-\dfrac{p}{2},-k\left(m+\dfrac{p}{2}\right)\right)$,从而 $|FD|^2=p^2+k^2\left(m+\dfrac{p}{2}\right)^2$, ………………………………… (8 分)

由抛物线定义可知,$|FA|=x_1+\dfrac{p}{2}$,$|FB|=x_2+\dfrac{p}{2}$,

故 $|FA|\cdot|FB|=\left(x_1+\dfrac{p}{2}\right)\left(x_2+\dfrac{p}{2}\right)=x_1x_2+\dfrac{p}{2}(x_1+x_2)+\dfrac{p^2}{4}=\left(m+\dfrac{p}{2}\right)^2+\dfrac{p^2}{k^2}$,

由 $|FA|\cdot|FB|=|FD|^2$,得 $\left(m+\dfrac{p}{2}\right)^2+\dfrac{p^2}{k^2}=p^2+k^2\left(m+\dfrac{p}{2}\right)^2$,

即 $(k^2-1)\left[\left(m+\dfrac{p}{2}\right)^2+\dfrac{p^2}{k^2}\right]=0$, ……………………………………………… (11 分)

因为 $\left(m+\dfrac{p}{2}\right)^2>0$,$\dfrac{p^2}{k^2}>0$,故 $k^2=1$,解得 $k=\pm1$. …………………………………… (12 分)

21.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质,考查数学运算、逻辑推理、数学抽象的核心素养.

【解析】(1)依题意,$f(x)=e^x+\dfrac{1}{2}x^2-x$,$f'(x)=e^x+x-1$, …………………………………… (1 分)

易知函数 $f'(x)$ 为增函数,且 $f'(0)=0$, ………………………………………………… (2 分)

故当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$, ………………………………… (3 分)

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$,单调递增区间为 $(0,+\infty)$. ……………………… (4 分)

(2)证明:要证 $32f(x)>-7$,即证 $e^x+\dfrac{1}{2}x^2+ax+\dfrac{7}{32}>0$;

①当 $x\geqslant0$ 时,因为 $a\in[0,1]$,则显然有 $e^x+\dfrac{1}{2}x^2+ax+\dfrac{7}{32}>0$; ……………………… (5 分)

②当 $x<0$ 时,令 $g(a)=xa+e^x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{7}{32}$,可知函数 $g(a)$ 在 $a\in[0,1]$ 时单调递减,

所以只需证明 $g(1)>0$,即证 $e^x+\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{7}{32}>0$; ………………………………… (6 分)

令 $h(x)=e^x+\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{7}{32}(x<0)$,则 $\varphi(x)=h'(x)=e^x+x+1$,

显然 $\varphi(x)$ 单调递增,$\varphi(-2)<0$,$\varphi(-1)>0$,所以存在唯一 $x_0\in(-2,-1)$,使 $\varphi(x_0)=0$,
且 $x\in(-\infty,x_0)$ 时 $\varphi(x)<0$,$h(x)$ 单调递减;$x\in(x_0,+\infty)$ 时 $\varphi(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,
所以 $h(x)\geqslant h(x_0)$. ………………………………………………………………………… (8 分)
因为 $\varphi(x_0)=0$,所以 $e^{x_0}+x_0+1=0$,即 $e^{x_0}=-(x_0+1)$,

所以 $h(x)\geqslant h(x_0)=e^{x_0}+\dfrac{1}{2}x_0^2+x_0+\dfrac{7}{32}=-(x_0+1)+\dfrac{1}{2}x_0^2+x_0+\dfrac{7}{32}=\dfrac{1}{2}x_0^2-\dfrac{25}{32}$. ………… (10 分)

又因为 $\ln4\approx1.386>\dfrac{5}{4}$,所以 $e^{\frac{5}{4}}<4$,所以 $\varphi\left(-\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{1}{e^{\frac{5}{4}}}-\dfrac{1}{4}>0$,

从而 $x_0\in\left(-2,-\dfrac{5}{4}\right)$,所以 $\dfrac{1}{2}x_0^2-\dfrac{25}{32}>\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{5}{4}\right)^2-\dfrac{25}{32}=0$. ……………………… (11 分)

所以 $h(x)>0$,故 $e^x+\dfrac{1}{2}x^2+ax+\dfrac{7}{32}>0$;

综上所述,若 $a\in[0,1]$,则 $32f(x)>-7$. ………………………………………………… (12 分)

22.【命题意图】本题考查曲线的极坐标方程、曲线的参数方程以及直线参数方程的应用,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)依题意,得曲线 C_1:$(x-1)^2+y^2=1$, ………………………………………………………… (1 分)

令 $y=0$,解得 $x=2$,故 $A(2,0)$; ………………………………………………………………………… (2 分)

而 $x^2-2x+y^2=0$,故 $x^2+y^2=2x$,即 $\rho^2=2\rho\cos\theta$, ……………………………………………… (3 分)

故曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$. ……………………………………………………………… (4 分)

(2)依题意,得曲线 C_3:$x^2+y^2=1$,即 $\rho=1$.

当 $\theta_0=\dfrac{2\pi}{3}$时,点 B 的坐标为$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,则 $k_{AB}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{-\dfrac{1}{2}-2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$, ……………………………………………… (7 分)

故可设直线 AB 的参数方程为$\begin{cases}x=2-\dfrac{5\sqrt{7}}{14}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{21}}{14}t,\end{cases}$($t$ 为参数),

代入 $x^2+y^2=1$ 并化简得 $t^2-\dfrac{10\sqrt{7}}{7}t+3=0$, …………………………………………………… (9 分)

设 B,D 所对的参数分别为 t_1,t_2,则$|AB|\cdot|AD|=|t_1t_2|=3$. ……………………………………… (10 分)

23.【命题意图】本题考查绝对值不等式的解法、绝对值不等式的性质,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意,得$|4x+2|-|4x+4|+\dfrac{1}{2}x<1$,

当 $x\leqslant-1$ 时,$-4x-2+4x+4+\dfrac{1}{2}x<1$,解得 $x<-2$,故 $x<-2$; ………………………………… (2 分)

当$-1<x<-\dfrac{1}{2}$时,$-4x-2-4x-4+\dfrac{1}{2}x<1$,解得 $x>-\dfrac{14}{15}$,故$-\dfrac{14}{15}<x<-\dfrac{1}{2}$; ……………… (3 分)

当 $x\geqslant-\dfrac{1}{2}$时,$4x+2-4x-4+\dfrac{1}{2}x<1$,解得 $x<6$,故$-\dfrac{1}{2}\leqslant x<6$; ……………………………… (4 分)

故不等式 $f(x)+\dfrac{1}{2}x<1$ 的解集为$\left\{x\,\middle|\,x<-2\text{ 或}-\dfrac{14}{15}<x<6\right\}$. ……………………………… (5 分)

(2)依题意,$f\left(\dfrac{1}{2}x\right)>m\Leftrightarrow|2x+a|-|2x+a^2|>m$,

而$|2x+a|-|2x+a^2|\leqslant|2x+a-2x-a^2|=|a-a^2|$,故$|a-a^2|>m$, …………………………………… (7 分)

令 $g(a)=|a-a^2|$,$a\in[0,2]$,

结合 $g(a)$的图象可知,$[g(a)]_{max}=g(2)=2$,故 $m<2$,

故实数 m 的取值范围为$(-\infty,2)$. ……………………………………………………………………… (10 分)