机密★启用前(全国卷理科数学)

华大新高考联盟 2022 年名校高考押题卷

数学参考答案和评分标准

扫码关注　查询成绩

一、选择题

1.【答案】D

【解析】$(x+\mathrm{i})^8$(其中 i 为虚数单位)的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_8^r x^{8-r}\mathrm{i}^r$,令 $8-r=4$,得 $r=4$.

所以 x^4 项的系数为 $C_8^4(\mathrm{i})^4=70$,故选 D.

2.【答案】B

【解析】由 Venn 图易知 $M\subseteq N$,选 B.

3.【答案】D

【解析】命题 q:$\forall x\in\mathbf{R}, x^2+x-1>0$ 为假命题,故选 D.

4.【答案】A

【解析】由 $ae^2=2e^a, be^3=3e^b, 2c=e^c\ln 2$ 得 $\frac{e^a}{a}=\frac{e^2}{2}, \frac{e^b}{b}=\frac{e^3}{3}, \frac{e^c}{c}=\frac{2}{\ln 2}=\frac{4}{\ln 4}$,

构造函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}(x>0)$,求导得 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$,令 $f'(x)=0$,得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.

因为 $1<\ln 4<2<3$,所以 $f(\ln 4)<f(2)<f(3)$,即 $f(c)<f(a)<f(b)$,

又因为 $a,b,c\in(0,1)$,$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,所以 $b<a<c$,选 A.

5.【答案】C

【解析】首先将 A 与 C 捆绑到一起,与除 B、D 以外的其他 2 位同学共 3 个元素进行排列,有 $A_3^3=6$ 种排法,再将 B、D 插空到除最右边的 3 个位置中,有 $A_3^2=6$ 种排法,因此共有 $6\times 6=36$ 种排法,选 C.

6.【答案】C

【解析】因为 $\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_2P}=\mathbf{0}$,所以四边形 PF_1AF_2 是平行四边形,

所以 $S_{\triangle AF_2P}=S_{\triangle F_1F_2P}=\dfrac{b^2}{\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}}=b^2$,可得 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$.

过点 A 作 x 轴的平行线交 PQ 于点 B,可知四边形 F_1F_2BA 是平行四边形,

因为 $\overrightarrow{F_1F_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF_2}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$,所以 $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF_2}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF_2}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{F_2Q})=\overrightarrow{AF_2}+\frac{1}{3}\overrightarrow{F_2Q}$,

又 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{F_2B}$,所以有 $\overrightarrow{F_2B}=\frac{1}{3}\overrightarrow{F_2Q}$.

设 $|PF_2|=m$,则 $|PF_1|=m+2a$,$|AF_1|=|F_2B|=m$,$|F_2Q|=3m$,$|F_1Q|=3m+2a$,$|PQ|=4m$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_1Q$ 中,由 $|PF_1|^2+|PQ|^2=|F_1Q|^2$,解得 $m=a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中,由 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$,得 $10a^2=4c^2$,所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{2}$,故选 C.

7.【答案】D

【解析】随机变量 X 服从两点分布,若 $P(X=0)=\frac{1}{3}$,则成功概率 $p=P(X=1)=\frac{2}{3}$,$E(X)=\frac{2}{3}$,A 选项错误;

随机变量 $X\sim B(n,p)$，则 $E(X)=np=30$，$D(X)=np(1-p)=10$，解得 $p=\frac{2}{3}$，B 选项错误；

随机变量 $X\sim N(4,1)$，则 $P(X\geqslant 5)=0.1587$，$P(X\leqslant 3)=P(X\geqslant 5)$，
$P(3<X<5)=1-P(X\leqslant 3)-P(X\geqslant 5)=1-2P(X\geqslant 5)=1-2\times 0.1587=0.6826$，C 选项错误；

随机变量 X,Y 满足 $X+2Y=3$，则 $Y=\frac{3-X}{2}$，易知 $E(Y)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}E(X)=0$，$D(Y)=\frac{1}{4}D(X)=1$，则 $Y\sim N(0,1)$，D 选项正确.

8.【答案】C

【解析】当 $\omega=2$ 时，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称，A 选项正确；

当 $\omega=\pi$ 时，$f(x)=2\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$，$\pi\times\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{\pi}{3}=-\pi$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{4}{3},0\right)$ 成中心对称，B 选项正确；

当 $\omega=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{12}\right]$，$y=\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{12}\right]$ 上不单调递增，C 选项错误；

若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最小值为 -2，由 $x\in[0,\pi]$，得 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\left(\omega+\frac{1}{3}\right)\pi\right]$，$\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ 可取得 -1，所以 $\left(\omega+\frac{1}{3}\right)\pi\geqslant\frac{3}{2}\pi$，解得 $\omega\geqslant\frac{7}{6}$，D 选项正确.

9.【答案】B

【解析】$a=3n+2=5m+1\Rightarrow 3(n+2)=5(m+1)\Rightarrow\frac{n+2}{5}=\frac{m+1}{3}=k\Rightarrow n=5k-2$，$m=3k-1$，

所以 $a_k=15k-4$，又 $a_k=15k-4=281$，故 $k=19$.

所以选 B.

10.【答案】D

【解析】圆 $C:(x+1)^2+(y-1)^2=4$，圆心 $C(-1,1)$，半径 $r=2$，显然直线与圆相交，

设 $PC=d(d>2)$，$\angle APB=2\theta$，

则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\cos 2\theta=|\overrightarrow{PA}|^2(1-2\sin^2\theta)$，

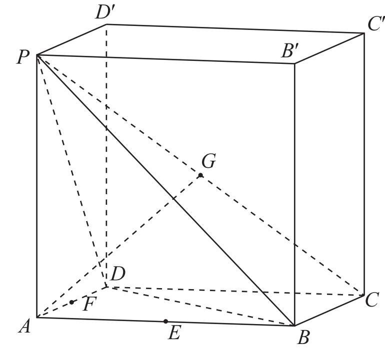
又 $|\overrightarrow{PA}|^2=d^2-4$，$\sin\theta=\frac{2}{d}$，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(d^2-4)\left(1-\frac{8}{d^2}\right)=d^2+\frac{32}{d^2}-12\geqslant 8\sqrt{2}-12$，

当且仅当 $d=2^{\frac{5}{4}}$ 时取等号，所以选 D.

11.【答案】D

【解析】可将四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 补形成正方体 $ABCD\text{-}PB'C'D'$，如图①，直线 AG 即体对角线 AC'，易证 $AC'\perp$ 面 PDB，A 选项正确；

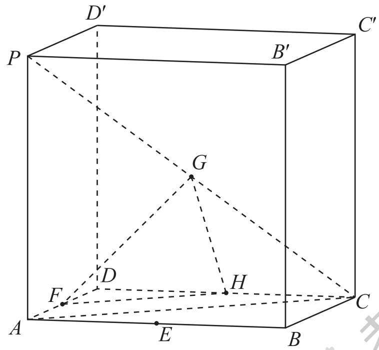


图①

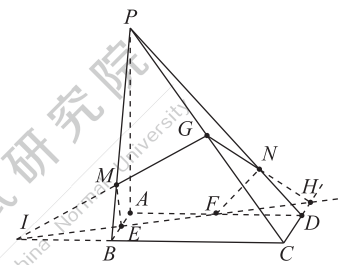
如图②，取 CD 的中点 H，连接 FH，可知 $FH\parallel AC$，所以 $\angle GFH$（或其补角）与直线 FG 和直线 AC 所成的角相同，在 $\triangle FGH$ 中，$FG=GH=FH$，所以 $\angle GFH=\frac{\pi}{3}$，B 选项正确；

如图③，延长 EF 交直线 CD 于点 H，交直线 BC 于点 I，连接 GI 交 PB 于点 M，连接 GH 交 PD 于点 N，则五边形 $EFNGM$ 即为平面 EFG 截

四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 所得的截面,C 选项正确;



图②



图③

当 $S_{\triangle AGT}=\dfrac{1}{2}$ 时,$AG=\sqrt{3}$,所以点 T 到 AG 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,点 T 在以 AG 为轴,底面半径 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 的圆柱上,又点 T 在平面 $ABCD$ 上,所以点 T 的轨迹是椭圆. D 选项错误.

12.【答案】B

【解析】因为函数 $f(x)=\dfrac{k\cdot 2^x-1}{2^x+k}(k\in\mathbf{R})$ 为奇函数,

所以 $f(-x)=-f(x)$,即 $\dfrac{k-2^x}{1+k\cdot 2^x}+\dfrac{k\cdot 2^x-1}{2^x+k}=0$,

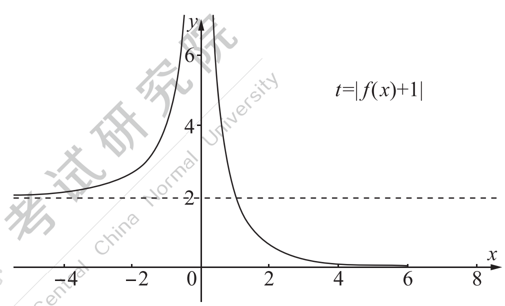
化简整理得 $(k^2-1)(4^x+1)=0$,所以 $k^2-1=0$,解得 $k=\pm 1$,

当 $k=1$ 时,$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$,定义域为 $\mathbf{R}$,不符合题意;

当 $k=-1$ 时,$f(x)=\dfrac{-2^x-1}{2^x-1}=-1-\dfrac{2}{2^x-1}$,定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,A 选项正确;

因为 $f(-1)=3$,$f(1)=-3$,$f(-1)>f(1)$,所以 $f(x)$ 在定义域上不是单调递增的,B 选项错误;

$f(x)+1=-\dfrac{2}{2^x-1}$,令 $t=|f(x)+1|$,函数图象如图所示.



若函数 $\varphi(x)$ 有四个零点,则 $t^2+at+a^2-7=0$ 有两个大于 2 的实根,$\begin{cases}\Delta=a^2-4(a^2-7)>0,\\ -\dfrac{a}{2}>2,\\ 2^2+2a+a^2-7>0,\end{cases}$ 符合题意的 a 不存在,C 选项正确;

若函数 $\varphi(x)$ 仅有的三个零点分别为 x_1,x_2,x_3,满足 $x_1<x_2<x_3$ 且 $x_1+x_3=0$,

则 $t^2+at+a^2-7=0$ 有一个实根 t_1 大于 2,另一根 $t_2\in(0,2]$,

由韦达定理得 $t_1+t_2=-a>2$,$t_1t_2=a^2-7>0$,

其中 $|f(x)+1|=t_1$ 的两根为 x_1,x_2,$|f(x)+1|=t_2$ 的实根为 x_3.

$t_1=|f(x_1)+1|=f(x_1)+1=-\dfrac{2}{2^{x_1}-1}$,$t_2=|f(x_3)+1|=-f(x_3)-1=\dfrac{2}{2^{x_3}-1}=\dfrac{2^{x_1+1}}{1-2^{x_1}}$,

因为 $t_1-t_2=2$,$(-a)^2-4(a^2-7)=4$,解得 $a=\pm 2\sqrt{2}$(正值舍去),所以 $a=-2\sqrt{2}\in(-3,-2)$. D 选项正确.

二、填空题

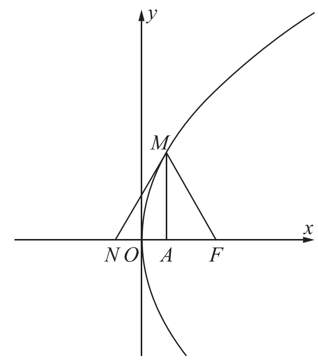
13.【答案】-6.

【解析】在$\triangle CDE$中，$CD=DE=2$，$\angle CDE=120^\circ$，由余弦定理得$CE=2\sqrt{3}$，

所以有$|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{DF}|=2\sqrt{3}$，$\overrightarrow{CE}$与$\overrightarrow{FD}$所成的角为$120^\circ$，

所以$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{FD}=(2\sqrt{3})^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$.

14.【答案】3.



【解析】如图，因为$\triangle FMN$是边长为2的正三角形，所以可设$y_M=\sqrt{3}$，当M与焦点F的横坐标相同时，$|MF|=p>2$，所以点M位于点F的左侧，$x_M=\frac{p}{2}-1=2-\frac{p}{2}$，解得$p=3$.

15.【答案】0.

【解析】$a_2=-1\in\{2a_1+1,2a_1+2\}$，而$a_1>-1$，$\therefore 2a_1+1=-1$，$a_1=-1$，

$a_3\in\{a_1+a_2+1,a_1+a_2+2\}=\{-1,0\}$，

$a_4\in\{a_1+a_3+1,a_1+a_3+2\}$，$a_4\in\{2a_2+1,2a_2+2\}=\{-1,0\}$，

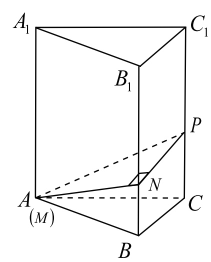
若$a_3=-1$，$\{a_1+a_3+1,a_1+a_3+2\}=\{-1,0\}$，而$a_3<a_4$，$\therefore a_4=0$.

若$a_3=0$，$\{a_1+a_3+1,a_1+a_3+2\}=\{1,0\}$，而$\{-1,0\}\cap\{1,0\}=\{0\}$，$\therefore a_4=0$，与$a_3<a_4$矛盾，舍去.

$a_5\in\{a_1+a_4+1,a_1+a_4+2\}=\{1,0\}$，

$a_5\in\{a_2+a_3+1,a_2+a_3+2\}=\{-1,0\}$，$\{-1,0\}\cap\{1,0\}=\{0\}$，$\therefore a_5=0$.

16.【答案】③④.



【解析】如图，不妨设M在A处，$|BN|=m$，$|CP|=n$，

则$MN^2=4+m^2$，$NP^2=(n-m)^2+4$，$AP^2=4+n^2$，

$4+m^2+(n-m)^2+4=4+n^2\Rightarrow n=m+\frac{2}{m}$，

$S^2_{\triangle MNP}=\frac{1}{4}MN^2\cdot NP^2=\frac{1}{4}(4+m^2)[(n-m)^2+4]=5+\frac{4}{m^2}+m^2=\left(m+\frac{2}{m}\right)^2+1=n^2+1$，

显然$n=m+\frac{2}{m}\geqslant 2\sqrt{2}$，即$8\leqslant n^2\leqslant 64$，

对于①，$MN=NP$，得$n=2m$，$\begin{cases}n=2m,\\ n=m+\frac{2}{m},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\sqrt{2},\\ n=2\sqrt{2},\end{cases}$斜边$MP=2\sqrt{3}$，$\sin\angle PAC=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，①错误；

对于②：$V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}=8\sqrt{3}$，$V_{A\text{-}BCNP}=\frac{1}{3}\times\frac{m+n}{2}\times2\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(m+n)=\frac{1}{2}\times8\sqrt{3}$，$m+n=12$，与$n=m+\frac{2}{m}$，联立得$\begin{cases}m=3+2\sqrt{2},\\ n=9-2\sqrt{2},\end{cases}$此时$N$不是$BB_1$的中点，②错误；

对于③，$S^2_{\triangle MNP}\leqslant 8^2+1$，$\therefore S_{\triangle MNP}$最大值为$\sqrt{65}$，③正确；

对于④，$\cos\theta=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MNP}}=\frac{\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{S_{\triangle MNP}}=\frac{\sqrt{3}}{S_{\triangle MNP}}$，又$S^2_{\triangle MNP}$最小值为9，$\therefore\cos\theta\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，④正确.

所以正确的是③④.

三、解答题

17.【解析】(1)设倒数第1,2,3,4柱高的公比为$q(q>1)$，

则$\frac{0.05(1-q^4)}{1-q}=0.75$，即$(1+q^2)(1+q)=15$，

记函数$f(q)=1+q+q^2+q^3$，$q>1$，

该函数在定义域上单调递增且 $f(2)=15$，故 $q=2$. ……………………………………………………………（3 分）
利用频率分布直方图的信息可估计该班的一分钟踢毽子的平均值为
$\mu=15\times0.09+25\times0.16+35\times0.4+45\times0.2+55\times0.1+65\times0.05=37.1$，……………………（4 分）
因为 $37.1>37$，所以 A 班能达到优秀标准. ………………………………………………………………（5 分）
(2) a 同学若是选择甲方式，记得分为 X，X 可能的取值为 9，5，4，0.

$P(X=9)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$，$P(X=5)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$，

$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$，$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$，

得分的期望值为 $E(X)=9\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}=6.3$. ……………………………………（8 分）

a 同学若是选择乙方式，记得分为 Y，Y 可能的取值为 10，5，4，0.

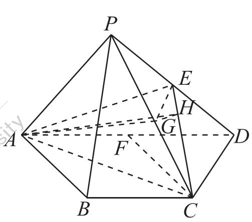
$P(X=10)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$，$P(X=5)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{11}{50}$，

$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$，$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$，

得分的期望值为 $E(Y)=10\times\frac{12}{25}+5\times\frac{11}{50}+4\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}=6.7$. ……………………………（11 分）

因为 $E(Y)>E(X)$，所以 a 同学该选择乙方式. ………………………………………………………（12 分）

18.【解析】(1) 取 AD 的中点 F，连接 CF，
因为 $BC\,/\!/\,AF$ 且 $BC=AF$，所以四边形 $ABCF$ 是平行四边形，所以 $CF=AB=1$.
因为 $CF=\frac{1}{2}AD$，所以 $AC\perp CD$. ……………………………………………………………………（3 分）
因为平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAC\cap$ 平面 $ABCD=AC$，所以 $CD\perp$ 平面 PAC，
又 $PA\subset$ 平面 PAC，所以 $PA\perp CD$. ……………………………………………………………………（5 分）
(2) 方法 1：如图，取 PC 的中点 G，连接 AG，EG.



因为 $\triangle PAC$ 为等边三角形，所以 $AG\perp PC$.
由(1)知 $CD\perp$ 平面 PAC，$\because CD\subset$ 平面 PCE，$\therefore$ 平面 $PAC\perp$ 平面 PCE.
又平面 $PAC\cap$ 平面 $PCE=PC$，$\therefore AG\perp$ 平面 PCE，$\therefore AG\perp CE$.
过点 G 作 $GH\perp EC$，垂足为 H，连接 AH.
$\because AG\cap GH=G$，$\therefore EC\perp$ 平面 AHG.
$\angle AHG$ 即为二面角 $P\text{-}CE\text{-}A$ 的平面角. ……………………………………………………………（8 分）

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，易得 $AC=\sqrt{3}$，$\therefore AG=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{3}{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle PCD$ 中，$PD=2$，$CE=\frac{1}{2}PD=1$，

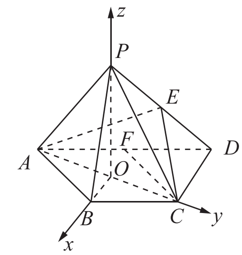
$\because EG$ 为 $\triangle PCD$ 的中位线，$\therefore$ $EG\,/\!/\,CD$，$\therefore EG\perp PC$，则 $GH=\frac{EG\times CG}{CE}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

$\tan\angle AHG=\frac{AG}{GH}=2\sqrt{3}$，所以 $\cos\angle AHG=\frac{\sqrt{13}}{13}$. ……………………………………………（11 分）

所以二面角 $P\text{-}CE\text{-}A$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$. ……………………………………………………………（12 分）

方法 2：取 AC 的中点 O，$\because PO\perp AC$，$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$. $\because AB=BC$，$\therefore OB\perp OC$.
以点 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$ 方向为 x 轴正方向，$\overrightarrow{OC}$ 方向为 y 轴正方向，$\overrightarrow{OP}$ 方向为 z 轴正方向建立如图所示

的空间直角坐标系. ………………………………………………………………………………………（6 分）



$P\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$，$A\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$D\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$E\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$

$\overrightarrow{PC}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{CE}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(0,\sqrt{3},0)$，………………（8 分）

设平面 PCE 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$ 取 $z_1=1$，得 $\overrightarrow{n_1}=(0,\sqrt{3},1)$.

设平面 ACE 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 取 $z_2=2$，得 $\overrightarrow{n_2}=(3,0,2)$. ……………………………………………………（10 分）

$\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$， ………………………………………………………………（11 分）

易知二面角 A-DF-C 为锐角，所以二面角 A-DF-C 的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$. ……………………………（12 分）

19.【解析】由题意得 $a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n-1}\right)a_n=\frac{2n+1}{2(2n-1)}a_n$，故 $\frac{a_{n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{2n-1}$，…………………（3 分）

而 $\frac{a_2}{3}=\frac{1}{4}\neq 0$，

从而数列 $\left\{\frac{a_n}{2n-1}\right\}$ 是以 $\frac{a_1}{1}=2\times\frac{a_2}{3}=\frac{1}{2}$ 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列. ………………………………（6 分）

(2)由(1)知 $\frac{a_n}{2n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，故 $a_n=(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$，…………………………………………………（8 分）

故 $S_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$， ①

$\frac{1}{2}S_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$， ② ……………………………………………（10 分）

①−②得 $\frac{1}{2}S_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}+2\times\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}$

$-(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{3}{2}-(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

所以 $S_n=3-(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n$. ………………………………………………………………………（12 分）

20.【解析】(1) $f'(x)=e^x-x$，设 $p(x)=f'(x)$，则 $p'(x)=e^x-1>0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f'(x)>f'(0)=1$，即 $\tan\theta>1$，因此 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. ……（4 分）

(2)令 $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{6}{5}\sin x$，$x\in(-2,+\infty)$，

则 $h'(x)=e^x-x-1-\frac{6}{5}\cos x$，设函数 $\varphi(x)=h'(x)$，得 $\varphi'(x)=e^x-1+\frac{6}{5}\sin x$，

当 $x\in(-2,0]$ 时，$e^x-1\leqslant 0$，$\sin x\leqslant 0$，$\varphi'(x)\leqslant 0$；

当 $x\in(0,\pi)$ 时，$e^x-1>0$，$\sin x>0$，$\varphi'(x)>0$；

当 $x\in[\pi,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)=e^x-1+\frac{6}{5}\sin x>e-1-\frac{6}{5}>0$.

所以 $\varphi(x)$ 在 $(-2,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(x)_{\min}=\varphi(0)=-\frac{6}{5}<0$，………… (6 分)

$\varphi(-2)=e^{-2}+1-\frac{6}{5}\cos 2>0$，所以 $\exists x_1\in(-2,0)$，使得 $\varphi(x_1)=0$.

又 $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{4}-1-\frac{6}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 2.19-\frac{3.14}{4}-1-0.6\times 1.41=-0.441<0$.

$\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{\frac{\pi}{3}}-\frac{\pi}{3}-1-\frac{6}{5}\times\frac{1}{2}\approx 2.85-\frac{3.14}{3}-1-0.6\approx 0.203>0$.

所以 $\exists x_2\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$，使得 $\varphi(x_2)=0$. …………………………………………………………………… (8 分)

函数 $h(x)$ 的单调性及极值情况如下表：

x	$(-2,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

因为 $h(-2)=e^{-2}-\frac{6}{5}\sin(-2)=e^{-2}+\frac{6}{5}\sin 2>0$，所以只需证明 $h(x_2)>0$. …………………… (9 分)

由 $h'(x_2)=0$，得 $e^{x_2}-x_2=1+\frac{6}{5}\cos x_2$，

所以 $h(x_2)=e^{x_2}-\frac{1}{2}x_2^2-x_2-\frac{6}{5}\sin x_2=1+\frac{6}{5}\cos x_2-\frac{6}{5}\sin x_2-\frac{1}{2}x_2^2$.

令 $m(t)=1+\frac{6\sqrt{2}}{5}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}t^2$，$t\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$，

因为 $m(t)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减，

所以 $h(x_2)=m(x_2)>m\left(\frac{\pi}{3}\right)=1+\frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\pi^2}{18}\approx 1.6-0.6\times 1.73-\frac{3.14^2}{18}\approx 0.014>0$，

所以 $h(x)>0$ 对于 $x\in(-2,+\infty)$ 恒成立，即 $f(x)>g(x)$ 对于 $x\in(-2,+\infty)$ 恒成立. …… (12 分)

21.【解析】(1)圆心 O 到直线 l_1 的距离为 $d=\sqrt{b^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\left|\frac{1}{2}b\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$，解得 $b^2=1$，

联立 $\begin{cases}b=1,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ c^2=a^2-b^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$ 故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………… (4 分)

(2)由(1)可知，点 $A(0,1)$，$B(0,-1)$，直线 l_2 的方程为 $y=kx+1(k<0)$，设点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+k^2)x^2+2kx=0$，所以 $x_1=\frac{-2k}{k^2+1}$，$y_1=kx_1+1=\frac{-k^2+1}{k^2+1}$，

联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kx=0$，所以 $x_2=\frac{-8k}{4k^2+1}$，$y_2=kx_2+1=\frac{-4k^2+1}{4k^2+1}$，

$k_1+\frac{1}{4k_2}=\frac{y_1+1}{x_1}+\frac{x_2}{4(y_2+1)}=\frac{\frac{2}{k^2+1}}{\frac{-2k}{k^2+1}}+\frac{\frac{-8k}{4k^2+1}}{\frac{8}{4k^2+1}}=-\frac{1}{k}-k$. ……………………………………… (8 分)

由 $-\frac{1}{k}-k\in\left[2,\frac{5}{2}\right)$，得 $k\in\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$，…………………………………………（9 分）

$S_{\triangle BPQ}=S_{\triangle ABQ}-S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}|AB|(x_2-x_1)=x_2-x_1=\frac{-8k}{4k^2+1}-\frac{-2k}{k^2+1}=\frac{-6k}{(4k^2+1)(k^2+1)}$. …（10 分）

令函数 $f(k)=\frac{-6k}{(4k^2+1)(k^2+1)}$，

$f'(k)=\frac{6(12k^4+5k^2-1)}{[(4k^2+1)(k^2+1)]^2}>0$，所以函数 $f(k)$ 在 $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，$f(-2)=\frac{12}{85}$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{5}$，

所以 $\triangle BPQ$ 面积的取值范围为 $\left(\frac{12}{85},\frac{6}{5}\right)$. …………………………………………（12 分）

22.【解析】(1)因为 $\rho\cos\theta=4\tan\theta$，所以 $\rho^2\cos^2\theta=4\rho\sin\theta\Rightarrow x^2=4y$，

又 $\begin{cases}x=4+2\cos\alpha,\\ y=2+2\sin\alpha,\end{cases}\Rightarrow(x-4)^2+(y-2)^2=4$，

所以圆 M 的普通方程为 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$，

曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2=4y$. …………………………………………（5 分）

(2)$M(4,2)$，设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=4+t\cos\alpha,\\ y=2+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），带入 $x^2=4y$ 得

$(4+t\cos\alpha)^2=4(2+t\sin\alpha)$，$t^2\cos^2\alpha+4(2\cos\alpha-\sin\alpha)t+8=0$，

$\Delta=16(2\cos\alpha-\sin\alpha)^2-4\times8\cos^2\alpha>0\Rightarrow2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha>0$，　①

$t_1+t_2=-\frac{4(2\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$，$t_1t_2=\frac{8}{\cos^2\alpha}$. …………………………………………（7 分）

又 $t_1t_2=\frac{8}{\cos^2\alpha}>0$，所以 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1+t_2|}{t_1t_2}=1$，

$|2\cos\alpha-\sin\alpha|=2\Rightarrow4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha=4$，…………………………………………（8 分）

$\frac{4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=4\Rightarrow\frac{4+\tan^2\alpha-4\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=4$，

$3\tan^2\alpha+4\tan\alpha=0\Rightarrow\tan\alpha=0$ 或 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，代入①式满足 l：$y-2=0$ 或 $y-2=-\frac{4}{3}(x-4)$，

所以直线 l 的直角坐标方程为 $y-2=0$ 或 $4x+3y-22=0$. …………………………………………（10 分）

23.【解析】(1)$f(x)=|x-a|+|x+b|+c\geqslant|(x-a)-(x+b)|+c=|a+b|+c$，

因为 a,b,c 都是正数，且 $f(x)$ 的最小值为 1，所以 $|a+b|+c=a+b+c=1$. …………………………（5 分）

(2)$a^{3a-1}\cdot b^{3b-1}\cdot c^{3c-1}=a^{2a-b-c}\cdot b^{2b-a-c}\cdot c^{2c-a-b}=a^{a-b+a-c}\cdot b^{b-a+b-c}\cdot c^{c-a+c-b}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}\cdot$

$\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}$. …………………………………………（7 分）

若 $a\geqslant b$ 时，$\frac{a}{b}\geqslant1$，$a-b\geqslant0\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\geqslant1$，

若 $a<b$ 时，$0<\frac{a}{b}<1$，$a-b<0\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，

所以 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\geqslant1$. …………………………………………（9 分）

同理可证 $\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}\geqslant1$，$\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\geqslant1$，所以 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\geqslant1$.

故 $a^{3a-1}\cdot b^{3b-1}\cdot c^{3c-1}\geqslant1$. …………………………………………（10 分）