机密★启用前(全国卷文科数学)

华大新高考联盟2022年名校高考押题卷

数学参考答案和评分标准

扫码关注　查询成绩

一、选择题

1.【答案】B

【解析】由 Venn 图易知 $M\subseteq N$,选 B.

2.【答案】D

【解析】$(x+\mathrm{i})^8$(其中 i 为虚数单位)的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_8^r x^{8-r}\mathrm{i}^r$,令 $8-r=4$,得 $r=4$.
所以 x^4 项的系数为 $C_8^4(\mathrm{i})^4=70$,故选 D.

3.【答案】D

【解析】命题 q:$\forall x\in\mathbf{R}, x^2+x-1>0$ 为假命题,故选 D.

4.【答案】D

【解析】$y=2\cos3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(-\frac{\pi}{2}+3x\right)=2\sin3x$,所以选 D.

5.【答案】C

【解析】由题意得 $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{3}{4\times4}=\frac{3}{16}$,$P(AB)=\frac{2}{4\times4}=\frac{1}{8}$,

$\because P(AB)\neq P(A)\cdot P(B)$,$\therefore$事件 A 和事件 B 不相互独立,$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{4}$. 故选 C.

6.【答案】C

【解析】$2^{x+2y}=2^x+2^{2y}\geqslant2\sqrt{2^{x+2y}}\Rightarrow2^{x+2y}\geqslant2^{\frac{x+2y}{2}+1}\Rightarrow x+2y\geqslant2$,

当且仅当 $x=1$,$y=\frac{1}{2}$时取等号,所以选 C.

7.【答案】B

【解析】$a=\log_{0.3}0.2>\log_{0.3}0.3=1$,$b=\log_3 2<\log_3 3=1$,$c=\log_{30}20<\log_{30}30=1$,

$b-c=\log_3 2-\log_{30}20=\frac{\lg2}{\lg3}-\frac{1+\lg2}{1+\lg3}=\frac{\lg2-\lg3}{\lg3(1+\lg3)}<0$, $b<c<a$. 故选 B.

8.【答案】D

【解析】$\tan(\alpha-\beta)=\tan\alpha-\tan\beta$,$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\tan\alpha-\tan\beta$,$(\tan\alpha-\tan\beta)\cdot\frac{\tan\alpha\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=0$,

$\because\tan\alpha\tan\beta\neq0$,$\tan\alpha=\tan\beta$,$\therefore\alpha=k\pi+\beta$,$k\in\mathbf{Z}$.

又 $\sin^2\alpha=\sin^2(k\pi+\beta)=\sin^2\beta$,$\therefore\sin^2\alpha+\cos^2\beta=\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$. 故选 D.

9.【答案】C

【解析】因为$\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_2P}=\mathbf{0}$,所以四边形 PF_1AF_2 是平行四边形,

所以 $S_{\triangle AF_2P}=S_{\triangle F_1F_2P}=\frac{b^2}{\tan\frac{\angle F_1PF_2}{2}}=b^2$,可得$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$.

过点 A 作 x 轴的平行线交 PQ 于点 B,可知四边形 F_1F_2BA 是平行四边形,

因为$\overrightarrow{F_1F_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF_2}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$,

所以$\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF_2}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF_2}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{F_2Q})=\overrightarrow{AF_2}+\frac{1}{3}\overrightarrow{F_2Q}$,

又$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{F_2B}$,所以有$\overrightarrow{F_2B}=\frac{1}{3}\overrightarrow{F_2Q}$.

设$|PF_2|=m$,则$|PF_1|=m+2a$,$|AF_1|=|F_2B|=m$,$|F_2Q|=3m$,$|F_1Q|=3m+2a$,$|PQ|=4m$.

在 $Rt\triangle PF_1Q$ 中,由$|PF_1|^2+|PQ|^2=|F_1Q|^2$,解得 $m=a$.

在 $Rt\triangle PF_1F_2$ 中,由$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$,得 $10a^2=4c^2$,所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{2}$,故选 C.

10.【答案】C

【解析】当 $\omega=2$ 时,$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,$2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$对称,A 选项正确;

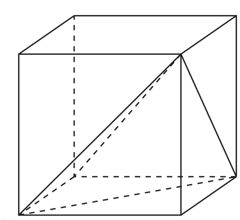
当 $\omega=\pi$ 时,$f(x)=2\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$,$\pi\times\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{\pi}{3}=-\pi$, 所以 $f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{4}{3},0\right)$成中心对称,B 选项正确;

当 $\omega=\frac{1}{2}$时,$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$,当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{12}\right]$,$y=\sin x$ 在$\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{12}\right]$上不单调递增,C 选项错误;

若 $f(x)$在$[0,\pi]$上的最小值为-2,由 $x\in[0,\pi]$,得 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\left(\omega+\frac{1}{3}\right)\pi\right]$,$\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$可取得$-1$,

所以$\left(\omega+\frac{1}{3}\right)\pi\geqslant\frac{3}{2}\pi$,解得 $\omega\geqslant\frac{7}{6}$,D 选项正确.

11.【答案】C



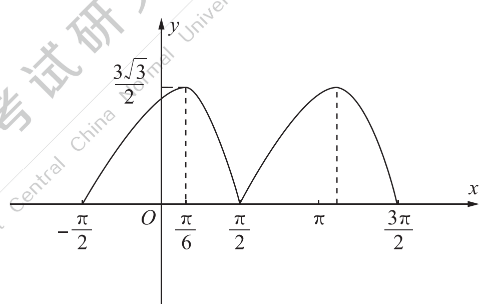
【解析】三视图还原成几何体如图所示,

三棱锥的四个面的面积分别为:

$S_1=\frac{1}{2}\times4\times4=8$,$S_2=S_3=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$,$S_4=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{2}\sin60^\circ=8\sqrt{3}$.

所以选 C.

12.【答案】C



【解析】因为 $f(x+\pi)=f(x)$,

所以 $f(x)$是以 π 为周期的周期函数,

设 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时,

$f(x)=\sin2x+2\cos x=2\sin x\cos x+2\cos x$,

$f'(x)=2\cos^2x-2\sin^2x-2\sin x=-2(2\sin^2x+\sin x-1)=$

$-2(2\sin x-1)(\sin x+1)$,

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$时,$f'(x)\geqslant0$,函数 $f(x)$单调递增,

当 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$单调递减,

根据函数 $f(x)$的周期性作出 $y=f(x)$的大致图象,

由图知结论①②④正确,故选 C.

二、填空题

13.【答案】$5\sqrt{2}$.

【解析】$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-3,x-1)$，$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0\Rightarrow x=7$，

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1+49}=5\sqrt{2}$.

14.【答案】$y=\pm\sqrt{3}x$.

【解析】当 $m-1<0$ 且 $2-m<0$ 时，m 不存在，

当 $m-1>0$ 且 $2-m>0$ 时，得 $1<m<2$，$e^2=\dfrac{m-1+2-m}{m-1}=4\Rightarrow m=\dfrac{5}{4}$，

所以 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，双曲线渐近线的方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.

15.【答案】2 或 4.

【解析】$4a_1n+\dfrac{4n(4n-1)}{2}d=\lambda\left[2a_1n+\dfrac{2n(2n-1)}{2}d\right]$，化简得 $(4d-\lambda d)n+2a_1-d-\lambda a_1+\dfrac{1}{2}\lambda d=0$，

故 $\begin{cases}4d-\lambda d=0,\\ 2a_1-d-\lambda a_1-\dfrac{1}{2}\lambda d=0.\end{cases}$

由 $4d-\lambda d=0$，得 $d=0$ 或 $\lambda=4$，

当 $d=0$ 时，显然 $\lambda=2$；当 $\lambda=4$ 时，$d=2a_1$，满足条件，

所以 $\lambda=2$ 或 4.

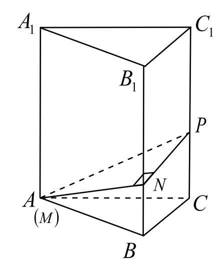
16.【答案】$[3,\sqrt{17}]$.

【解析】不妨设 M 在 A 处，$|BN|=m$，$|CP|=n$，

则 $MN^2=4+m^2$，$NP^2=(n-m)^2+4$，$AP^2=4+n^2$，

$4+m^2+(n-m)^2+4=4+n^2\Rightarrow n=m+\dfrac{2}{m}$，

$S_{\triangle MNP}^2=\dfrac{1}{4}MN^2\cdot NP^2=\dfrac{1}{4}(4+m^2)[(n-m)^2+4]=5+\dfrac{4}{m^2}+m^2=\left(m+\dfrac{2}{m}\right)^2+1=n^2+1$，



显然 $n=m+\dfrac{2}{m}\geqslant2\sqrt{2}$，即 $8\leqslant n^2\leqslant16$，

故 $3\leqslant S_{\triangle MNP}\leqslant\sqrt{17}$.

三、解答题

17.【解析】(1)在 100 瓶的样本中 $x<13$ 的共抽取 $0.01\times2\times100=2$ 瓶，不妨设为 a,b，

$x\geqslant21$ 的共抽取 $0.015\times2\times100=3$ 瓶，不妨设为 1,2,3，…………（2 分）

则从这 5 瓶二等品中抽取 2 瓶包含如下基本事件：$(a,b),(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(1,2),(1,3),(2,3)$ 共 10 个基本事件，

质量指标值 $x<13$ 的消毒液恰好有 1 瓶的基本事件有：$(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)$ 共 6 个基本事件，…………（4 分）

所以这 2 瓶二等品消毒液中其质量指标值 $x<13$ 的消毒液恰好有 1 瓶的概率为 $P=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$. …（6 分）

(2)该厂 5 月份生产特等品的消毒液为 $0.19\times2\times10=3.8$ 万瓶，…………（8 分）

一等品的消毒液为 $(0.06\times2+0.175\times2+0.05\times2)\times10=5.7$ 万瓶，…………（10 分）

该厂 5 月份生产的消毒液的利润是 $3.8\times35+5.7\times30-10\times20=104$ 万元，

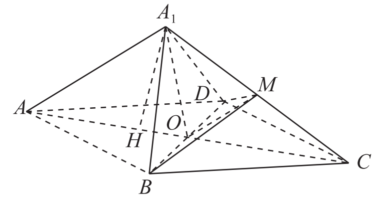
所以该厂 5 月份生产的消毒液的利润是 104 万元. …………（12 分）

18.【解析】(1)如图，连接 A_1O，

$\because ABCD$ 为菱形，$\therefore BD\perp AC$，…………（1 分）

又 $\because A_1B=A_1D$，O 为 BD 的中点，

$\therefore BD \perp A_1O$. ……………………………………………………………… (2 分)



又$\because AC \cap A_1O = O$,

$\therefore BD \perp$平面 AA_1C,而 $BD \subset$平面 MBD, ……………………… (5 分)

$\therefore$平面 $AA_1C \perp$平面 MBD. ………………………………………………… (6 分)

(2)连接 OM,$\because AA_1 /\!/$平面 MBD,而平面 $AA_1C \cap$平面 $MBD = OM$,

$\therefore AA_1 /\!/ OM$.

又 O 为 AC 的中点,$\therefore M$ 为 A_1C 的中点. …………………………………………………………………… (7 分)

由(1)知 $BD \perp$平面 AA_1C,$\therefore$平面 $AA_1C \perp$平面 $ABCD$,

作 $A_1H \perp AC$ 于 H,所以 $A_1H \perp$平面 $ABCD$,

$\because AB = 2, \angle BAD = 60^\circ, AA_1 = \sqrt{3}$,

$\therefore \triangle AA_1O$ 为等边三角形,$\therefore A_1H = \dfrac{3}{2}$. ……………………………………………………………………… (10 分)

故三棱锥 $M\text{-}A_1BD$ 的体积 $V_{M\text{-}A_1BD} = V_{A_1\text{-}BCD} - V_{M\text{-}BCD} = \dfrac{1}{3} S_{\triangle BCD}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. ………………… (12 分)

19.【解析】(1) $f(x) = \dfrac{\sin(x+B)\cos C + \cos(x+B)\sin C}{\cos C}$

$= \dfrac{\sin(x+B+C)}{\cos C}$

$= \dfrac{\sin(\pi + x - A)}{\cos C}$

$= -\dfrac{\sin(x-A)}{\cos C}$. ……………………………………………………………………………………… (2 分)

$\because f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{\cos C}$,

$\therefore -\dfrac{\sin\left(\dfrac{5\pi}{6} - A\right)}{\cos C} = -\dfrac{1}{\cos C} \Rightarrow \sin\left(\dfrac{5\pi}{6} - A\right) = 1$. ……………………………………………………………… (4 分)

$0 < A < \pi \Rightarrow -\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{5\pi}{6} - A < \dfrac{5\pi}{6}$,

$\dfrac{5\pi}{6} - A = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow A = \dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………………………… (6 分)

(2) $\triangle ABC$ 的面积 $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}bc \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow bc = 4$. ……………………………………………… (7 分)

由正弦定理知 $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A} = 2R$,

$\sin B = \dfrac{b}{2R}, \sin C = \dfrac{c}{2R}, a = \sqrt{3}R$, $\sin B + \sin C = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow b + c = \sqrt{6}R$, ……………………………………… (9 分)

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow a^2 = (b+c)^2 - 3bc$,

$3R^2 = 6R^2 - 12 \Rightarrow R = 2$, ……………………………………………………………………………… (11 分)

所以 $a = 2\sqrt{3}$. ……………………………………………………………………………………………… (12 分)

20.【解析】(1)依题意知椭圆 C 不可能同时过 P_1, P_2,所以一定经过 P_3, P_4,

即$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{3}{2b^2} = 1, \\ \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{7}{4b^2} = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 2, \end{cases}$ ……………………………………………………………… (3 分)

P_1 显然满足$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$,所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………………………………(4 分)

(2)A,B,P_2 三点共线,设 AB 的方程为 $y=k(x-3)$, ………………………………………………(5 分)

$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=k(x-3),\end{cases}\Rightarrow x^2+2k^2(x^2-6x+9)=4$,

$(1+2k^2)x^2-12k^2x+18k^2-4=0$,

$\Delta=(12k^2)^2-4(1+2k^2)(18k^2-4)>0\Rightarrow k^2<\frac{2}{5}$, ………………………………………………(7 分)

$x_1+x_2=\frac{12k^2}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{18k^2-4}{1+2k^2}$, ………………………………………………………(8 分)

$$k_1k_2=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{k^2(x_1-3)(x_2-3)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{k^2[x_1x_2-3(x_1+x_2)+9]}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

$$=\frac{k^2\left[\frac{18k^2-4}{1+2k^2}-3\left(\frac{12k^2}{1+2k^2}\right)+9\right]}{\frac{18k^2-4}{1+2k^2}-2\left(\frac{12k^2}{1+2k^2}\right)+4}=\frac{k^2(18k^2-4-36k^2+9+18k^2)}{18k^2-4-24k^2+4+8k^2}=\frac{5k^2}{2k^2}=\frac{5}{2}.$$ ………………(12 分)

21.【解析】(1)$f(x)=\frac{1+a\ln x}{x}\ (x>0)$,

$f'(x)=\frac{a-(1+a\ln x)}{x^2}=\frac{a-1-a\ln x}{x^2}$. ………………………………………………………………(1 分)

当 $a=0$ 时,$f'(x)=\frac{a-(1+a\ln x)}{x^2}=-\frac{1}{x^2}<0$ 恒成立,$f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数, …………(2 分)

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)>0\Rightarrow a-1-a\ln x>0\Rightarrow \ln x<\frac{a-1}{a}\Rightarrow 0<x<e^{\frac{a-1}{a}}$, ……………………………(3 分)

综上,当 $a=0$ 时,$f(x)$的减区间为$(0,+\infty)$;

当 $a>0$ 时,$f(x)$的单调递增区间为$(0,e^{\frac{a-1}{a}})$,单调递减区间为$(e^{\frac{a-1}{a}},+\infty)$. ………………………(4 分)

(2)$f(x)\leqslant x^2\Leftrightarrow x^3-a\ln x-1\geqslant 0$,

设 $g(x)=x^3-a\ln x-1\ (x>0)$,

$g'(x)=3x^2-\frac{a}{x}=\frac{3x^3-a}{x}$. ……………………………………………………………………(5 分)

①当 $a\leqslant 0$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,而 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}-a\ln\frac{1}{2}-1=-\frac{7}{8}+a\ln 2<0$,

所以不满足. ……………………………………………………………………………………………(6 分)

②当 $a>0$ 时,$g'(x)=\frac{3x^3-a}{x}=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{a}{3}}$,

当 $x\in\left(0,\sqrt[3]{\frac{a}{3}}\right)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$为减函数,当 $x\in\left(\sqrt[3]{\frac{a}{3}},+\infty\right)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$为增函数,

$g(x)\geqslant g\left(\sqrt[3]{\frac{a}{3}}\right)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 3\right)a-\frac{1}{3}a\ln a-1$. ………………………………………………(8 分)

令 $h(a)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 3\right)a-\frac{1}{3}a\ln a-1\ (a>0)$,

$h'(a)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 3-\frac{1}{3}(\ln a+1)=\frac{1}{3}(\ln 3-\ln a)$,

当 $a\in(0,3)$时,$h'(a)>0$,$h(a)$为增函数,当 $a\in(3,+\infty)$时,$h'(a)<0$,$g(x)$为减函数, ………(10 分)

$h(a)\leqslant h(3)=0$,又 $g(x)\geqslant h(a)\geqslant 0$.

$h(a)=0\Rightarrow a=3$，所以实数 a 的取值范围是 $\{3\}$. ……………………………………………………（12 分）

22.【解析】(1)因为 $\rho\cos\theta=4\tan\theta$，所以 $\rho^2\cos^2\theta=4\rho\sin\theta\Rightarrow x^2=4y$，

又 $\begin{cases}x=4+2\cos\alpha,\\ y=2+2\sin\alpha,\end{cases}\Rightarrow(x-4)^2+(y-2)^2=4$，

所以圆 M 的普通方程为 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$，

曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2=4y$. ……………………………………………………（5 分）

(2) $M(4,2)$，设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=4+t\cos\alpha,\\ y=2+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），带入 $x^2=4y$ 得

$(4+t\cos\alpha)^2=4(2+t\sin\alpha)$，$t^2\cos^2\alpha+4(2\cos\alpha-\sin\alpha)t+8=0$，

$\Delta=16(2\cos\alpha-\sin\alpha)^2-4\times8\cos^2\alpha>0\Rightarrow2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha>0$， ①

$t_1+t_2=-\dfrac{4(2\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$，$t_1t_2=\dfrac{8}{\cos^2\alpha}$. ……………………………………………………（7 分）

又 $t_1t_2=\dfrac{8}{\cos^2\alpha}>0$，所以 $\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}=\dfrac{1}{|t_1|}+\dfrac{1}{|t_2|}=\dfrac{|t_1+t_2|}{t_1t_2}=1$，

$|2\cos\alpha-\sin\alpha|=2\Rightarrow4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha=4$，……………………………………………（8 分）

$\dfrac{4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=4\Rightarrow\dfrac{4+\tan^2\alpha-4\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=4$，

$3\tan^2\alpha+4\tan\alpha=0\Rightarrow\tan\alpha=0$ 或 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$，代入①式满足 l：$y-2=0$ 或 $y-2=-\dfrac{4}{3}(x-4)$，

所以直线 l 的直角坐标方程为 $y-2=0$ 或 $4x+3y-22=0$. ……………………………………（10 分）

23.【解析】(1) $f(x)=|x-a|+|x+b|+c\geqslant|(x-a)-(x+b)|+c=|a+b|+c$，

因为 a,b,c 都是正数，且 $f(x)$ 的最小值为 1，所以 $|a+b|+c=a+b+c=1$. ………………（5 分）

(2) $a^{3a-1}\cdot b^{3b-1}\cdot c^{3c-1}=a^{2a-b-c}\cdot b^{2b-a-c}\cdot c^{2c-a-b}=a^{a-b+a-c}\cdot b^{b-a+b-c}\cdot c^{c-a+c-b}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}\cdot\left(\dfrac{a}{c}\right)^{a-c}\cdot$

$\left(\dfrac{b}{c}\right)^{b-c}$. ……………………………………………………………………………（7 分）

若 $a\geqslant b$ 时，$\dfrac{a}{b}\geqslant1$，$a-b\geqslant0\Rightarrow\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}\geqslant1$，

若 $a<b$ 时，$0<\dfrac{a}{b}<1$，$a-b<0\Rightarrow\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，

所以 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}\geqslant1$. ……………………………………………………………（9 分）

同理可证 $\left(\dfrac{a}{c}\right)^{a-c}\geqslant1$，$\left(\dfrac{b}{c}\right)^{b-c}\geqslant1$，所以 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}\cdot\left(\dfrac{a}{c}\right)^{a-c}\cdot\left(\dfrac{b}{c}\right)^{b-c}\geqslant1$.

故 $a^{3a-1}\cdot b^{3b-1}\cdot c^{3c-1}\geqslant1$. ……………………………………………………………（10 分）