机密★启用前(新高考卷)

华大新高考联盟2022年名校高考押题卷

数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】B

【解析】由 Venn 图易知 $M\subseteq N$,选 B.

2.【答案】D

【解析】不等式 $|\log_2 x|<1$ 的解集为 $A=\left(\frac{1}{2},2\right)$, 选 D.

3.【答案】A

【解析】在$\triangle CDE$中,$CD=DE=2$,$\angle CDE=120^\circ$, 由余弦定理得 $CE=2\sqrt{3}$,

所以有$|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{DF}|=2\sqrt{3}$,$\overrightarrow{CE}$与$\overrightarrow{FD}$所成的角为 120°,

所以$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{FD}=(2\sqrt{3})^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$, 选 A.

4.【答案】C

【解析】由题意得 $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{3}{4\times4}=\frac{3}{16}$, $P(AB)=\frac{2}{4\times4}=\frac{1}{8}$,

$\because P(AB)\neq P(A)\cdot P(B)$,$\therefore$事件 A 和事件 B 不相互独立,$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{4}$. 选 C.

5.【答案】D

【解析】$\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

在$\triangle ABC$中,$BC=\frac{AC}{\tan\angle ABC}=(2+\sqrt{3})AC$,在$\triangle ADC$中,$CD=\frac{AC}{\tan\angle ADC}=\frac{AC}{\tan 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}AC$.

由 $DB=BC-CD=(2+\sqrt{3})AC-\frac{\sqrt{3}}{3}AC=\left(2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)AC=a$,得 $AC=\frac{3a}{6+2\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}a$, 选 D.

6.【答案】C

【解析】首先将 A 与 C 捆绑到一起,与除 B、D 以外的其他 2 位同学共 3 个元素进行排列,有 $A_3^3=6$ 种排法,再将 B、D 插空到除最右边的 3 个位置中,有 $A_3^2=6$ 种排法,因此共有 $6\times6=36$ 种排法,选 C.

7.【答案】A

【解析】由 $ae^2=2e^a$,$be^3=3e^b$,$2c=e^c\ln 2$ 得$\frac{e^a}{a}=\frac{e^2}{2}$, $\frac{e^b}{b}=\frac{e^3}{3}$, $\frac{e^c}{c}=\frac{2}{\ln 2}=\frac{4}{\ln 4}$,

构造函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}(x>0)$,求导得 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$,令 $f'(x)=0$,得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当 $x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

因为 $1<\ln 4<2<3$,所以 $f(\ln 4)<f(2)<f(3)$,即 $f(c)<f(a)<f(b)$,

又因为 $a,b,c\in(0,1)$,$f(x)$在$(0,1)$上单调递减,所以 $b<a<c$,选 A.

8.【答案】C

【解析】因为$\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_2P}=\mathbf{0}$,所以四边形 PF_1AF_2 是平行四边形,

所以 $S_{\triangle AF_2P}=S_{\triangle F_1F_2P}=\dfrac{b^2}{\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}}=b^2$,可得$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{2}$.

过点 A 作 x 轴的平行线交 PQ 于点 B,可知四边形 F_1F_2BA 是平行四边形,

因为$\overrightarrow{F_1F_2}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF_2}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$,

所以$\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF_2}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF_2}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{F_2Q})=\overrightarrow{AF_2}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{F_2Q}$,

又$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{F_2B}$,所以有$\overrightarrow{F_2B}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{F_2Q}$.

设$|PF_2|=m$,则$|PF_1|=m+2a$,$|AF_1|=|F_2B|=m$,$|F_2Q|=3m$,$|F_1Q|=3m+2a$,$|PQ|=4m$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_1Q$ 中,由$|PF_1|^2+|PQ|^2=|F_1Q|^2$,解得 $m=a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中,由$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$,得 $10a^2=4c^2$,所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$,故选 C.

二、选择题

9.【答案】BD

【解析】随机变量 X 服从两点分布,若 $P(X=0)=\dfrac{1}{3}$,则成功概率 $p=P(X=1)=\dfrac{2}{3}$,$E(X)=\dfrac{2}{3}$,A 选项错误;

随机变量 $X\sim B(n,p)$,则 $E(X)=np=30$,$D(X)=np(1-p)=10$,解得 $p=\dfrac{2}{3}$,B 选项正确;

随机变量 $X\sim N(4,1)$,则 $P(X\geqslant5)=0.158\ 7$,$P(X\leqslant3)=P(X\geqslant5)$,

$P(3<X<5)=1-P(X\leqslant3)-P(X\geqslant5)=1-2P(X\geqslant5)=1-2\times0.158\ 7=0.682\ 6$,C 选项错误;

随机变量 X,Y 满足 $X+2Y=3$,则 $Y=\dfrac{3-X}{2}$,易知 $E(Y)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}E(X)=0$,$D(Y)=\dfrac{1}{4}D(X)=1$,则 $Y\sim N(0,1)$,D 选项正确.

10.【答案】ABD

【解析】当 $\omega=2$ 时,$f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,$2\times\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$,所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{12}$对称,A 选项正确;

当 $\omega=\pi$ 时,$f(x)=2\sin\left(\pi x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,$\pi\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)+\dfrac{\pi}{3}=-\pi$,所以 $f(x)$的图象关于点$\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$成中心对称,B 选项正确;

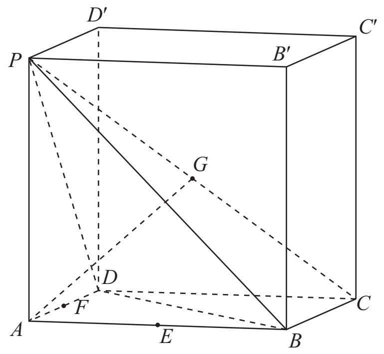
当 $\omega=\dfrac{1}{2}$时,$f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时,$\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{7\pi}{12}\right]$,$y=\sin x$ 在$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{7\pi}{12}\right]$上不单调递增,C 选项错误;

若 $f(x)$在$[0,\pi]$上的最小值为-2,由 $x\in[0,\pi]$,得 $\omega x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\left(\omega+\dfrac{1}{3}\right)\pi\right]$,$\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$可取得$-1$,所以$\left(\omega+\dfrac{1}{3}\right)\pi\geqslant\dfrac{3}{2}\pi$,解得 $\omega\geqslant\dfrac{7}{6}$,D 选项正确.

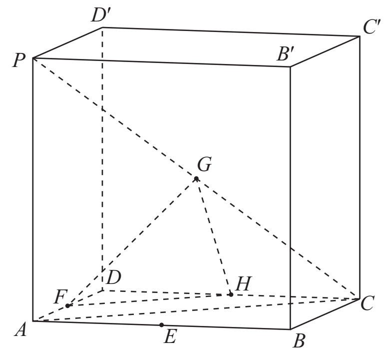
11.【答案】ABC

【解析】可将四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 补形成正方体 $ABCD\text{-}PB'C'D'$,如图①,直线 AG 即体对角线 AC',易证 $AC'\perp$面 PDB,A 选项正确;

如图②，取 CD 的中点 H，连接 FH，可知 $FH /\!/ AC$，所以$\angle GFH$（或其补角）与直线 FG 和直线 AC 所成的角相同，在$\triangle FGH$ 中，$FG=GH=FH$，所以$\angle GFH=\dfrac{\pi}{3}$，B 选项正确；



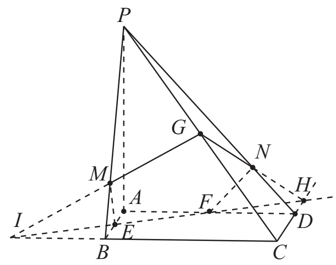
图①



图②

如图③，延长 EF 交直线 CD 于点 H，交直线 BC 于点 I，连接 GI 交 PB 于点 M，连接 GH 交 PD 于点 N，则五边形 $EFNGM$ 即为平面 EFG 截四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 所得的截面，C 选项正确；

当 $S_{\triangle AGT}=\dfrac{1}{2}$时，$AG=\sqrt{3}$，所以点 T 到 AG 的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，点 T 在以 AG 为轴，底面半径 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$的圆柱上，又点 T 在平面 $ABCD$ 上，所以点 T 的轨迹是椭圆. D 选项错误.



图③

12.【答案】ACD

【解析】因为函数 $f(x)=\dfrac{k\cdot 2^x-1}{2^x+k}(k\in\mathbf{R})$为奇函数，

所以 $f(-x)=-f(x)$，即$\dfrac{k-2^x}{1+k\cdot 2^x}+\dfrac{k\cdot 2^x-1}{2^x+k}=0$，

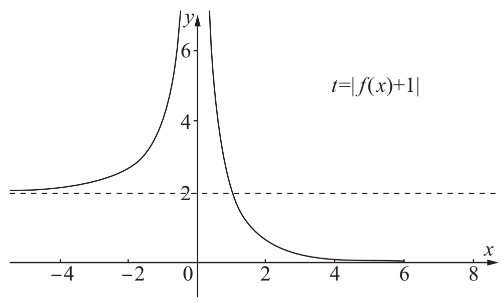
化简整理得$(k^2-1)(4^x+1)=0$，所以 $k^2-1=0$，解得 $k=\pm1$，

当 $k=1$ 时，$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$，定义域为 $\mathbf{R}$，不符合题意；

当 $k=-1$ 时，$f(x)=\dfrac{-2^x-1}{2^x-1}=-1-\dfrac{2}{2^x-1}$，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，A 选项正确；

因为 $f(-1)=3$，$f(1)=-3$，$f(-1)>f(1)$，所以 $f(x)$在定义域上不是单调递增的，B 选项错误；

$f(x)+1=-\dfrac{2}{2^x-1}$，令 $t=|f(x)+1|$，函数图象如图所示.



若函数 $\varphi(x)$有四个零点，则 $t^2+at+a^2-7=0$ 有两个大于 2 的实根，$\begin{cases}\Delta=a^2-4(a^2-7)>0,\\ -\dfrac{a}{2}>2,\\ 2^2+2a+a^2-7>0,\end{cases}$ 符合题意的 a 不存在，C 选项正确；

若函数 $\varphi(x)$仅有的三个零点分别为 x_1,x_2,x_3，满足 $x_1<x_2<x_3$ 且 $x_1+x_3=0$，

则 $t^2+at+a^2-7=0$ 有一个实根 t_1 大于 2，另一根 $t_2\in(0,2]$，由韦达定理得 $t_1+t_2=-a>2$，$t_1t_2=a^2-7>0$，其中$|f(x)+1|=t_1$ 的两根为 x_1,x_2，$|f(x)+1|=t_2$ 的实根为 x_3.

$t_1=|f(x_1)+1|=f(x_1)+1=-\dfrac{2}{2^{x_1}-1}$, $t_2=|f(x_3)+1|=-f(x_3)-1=\dfrac{2}{2^{x_3}-1}=\dfrac{2^{x_1+1}}{1-2^{x_1}}$,

因为 $t_1-t_2=2$,$(-a)^2-4(a^2-7)=4$,解得 $a=\pm2\sqrt{2}$(正值舍去),所以 $a=-2\sqrt{2}\in(-3,-2)$. D 选项正确.

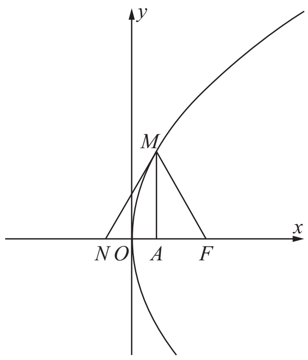
三、填空题

13.【答案】70.

【解析】$(x+\mathrm{i})^8$(其中 i 为虚数单位)的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_8^r x^{8-r}\mathrm{i}^r$,令 $8-r=4$,得 $r=4$.

所以 x^4 项的系数为 $\mathrm{C}_8^4(\mathrm{i})^4=70$.

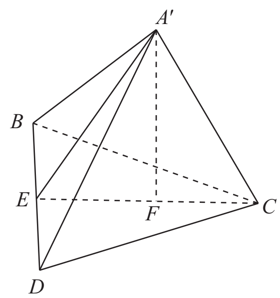
14.【答案】3.



【解析】如图,因为$\triangle FMN$ 是边长为 2 的正三角形,所以可设 $y_M=\sqrt{3}$,当 M 与焦点 F 的横坐标相同时,$|MF|=p>2$,所以点 M 位于点 F 的左侧,$x_M=\dfrac{p}{2}-1=2-\dfrac{p}{2}$, 解得 $p=3$.

15.【答案】$\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$.

【解析】如图,取 BD 的中点 E,连接 $A'E$,CE,则$\angle A'EC$ 为二面角 A'-BD-C 的平面角,$\angle A'EC=\dfrac{\pi}{3}$,$A'E=CE=\sqrt{3}$,所以$\triangle A'CE$ 为正三角形.



过点 A' 作 $A'F\perp CE$ 于点 F,易知 $A'F\perp$面 BCD,$A'F=A'E\cdot\sin\angle A'EC=\dfrac{3}{2}$,

设点 B 到$\triangle A'CD$ 所在平面的距离为 d,

由 $V_{A'\text{-}BCD}=V_{B\text{-}A'CD}$,可知 $A'F\cdot S_{\triangle BCD}=d\cdot S_{\triangle A'CD}$,解得 $d=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$.

16.【答案】2;115.(第一空 2 分,第二空 3 分)

【解析】易知第一个理想数为 1,第二个理想数为 2,当 $N\geqslant3$ 时,数列可分为:

第 1 组 1 个数:1,其和为 2^1-1,

第 2 组 2 个数:$2^0,2^1$,其和为 2^2-1,

第 3 组 3 个数:$2^0,2^1,2^2$,其和为 2^3-1,

……

第 N 组 N 个数:$2^0,2^1,2^2,\cdots,2^{N-1}$,其和为 2^N-1,

于是,前 N 组共$\dfrac{N(N+1)}{2}$个数,其和为 $2^{N+1}-2-N$,当 $N\geqslant3$ 时,$2^{N+1}-2-N$ 不可能是 2 的整数幂,

设第 $N+1$ 组还有 t 个数$(0<t<N+1)$,这 t 个数的和为 2^t-1,

所以项数 $n=\dfrac{N(N+1)}{2}+t$,其前 n 项和 $S_n=2^{N+1}+2^t-N-3$,

当 $N\geqslant3$ 时,若 $2^t=N+3$, 则 $N+1$ 是$\{a_n\}$的一个理想数.

由项数 $n\leqslant2\,022$,即$\dfrac{N(N+1)}{2}<2\,022<\dfrac{(N+1)(N+2)}{2}$得 $N\leqslant63$,由 $2^t=N+3\leqslant66$,因此 $t\leqslant6$.

当 $t=3$ 时,$N=5$,理想数为 6;当 $t=4$ 时,$N=13$,理想数为 14;

当 $t=5$ 时,$N=29$,理想数为 30;当 $t=6$ 时,$N=61$,理想数为 62;

所以当项数 $n\leqslant2\,022$ 时,$\{a_n\}$所有理想数的和为 $1+2+6+14+30+62=115$.

四、解答题

17.【解析】由题意得 $a_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n-1}\right)a_n=\dfrac{2n+1}{2(2n-1)}a_n$,故$\dfrac{a_{n+1}}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a_n}{2n-1}$, …………………… (3 分)

而$\frac{a_2}{3}=\frac{1}{4}\neq0$，

从而数列$\left\{\frac{a_n}{2n-1}\right\}$是以$\frac{a_1}{1}=2\times\frac{a_2}{3}=\frac{1}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列. ………………………………（5 分）

(2)由(1)知$\frac{a_n}{2n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，故 $a_n=(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$，………………………………（7 分）

故 $S_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$， ①

$\frac{1}{2}S_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$， ②

①−②得$\frac{1}{2}S_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}+2\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}$

$-(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{3}{2}-(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

所以 $S_n=3-(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n$. ………………………………（10 分）

18.【解析】(1)取 AD 的中点 F，连接 CF，

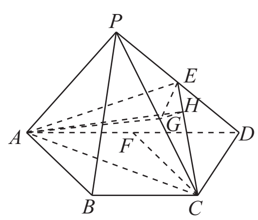
因为 $BC/\!/AF$ 且 $BC=AF$，所以四边形 $ABCF$ 是平行四边形，所以 $CF=AB=1$.

因为 $CF=\frac{1}{2}AD$，所以 $AC\perp CD$. ………………………………（3 分）

因为平面 $PAC\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAC\cap$平面 $ABCD=AC$，所以 $CD\perp$平面 PAC，

又 $PA\subset$平面 PAC，所以 $PA\perp CD$. ………………………………（5 分）

(2)方法 1：如图，取 PC 的中点 G，连接 AG，EG.



因为$\triangle PAC$ 为等边三角形，所以 $AG\perp PC$.

由(1)知 $CD\perp$平面 PAC，$\because CD\subset$平面 PCE，$\therefore$平面 $PAC\perp$平面 PCE.

又平面 $PAC\cap$平面 $PCE=PC$，$\therefore AG\perp$平面 PCE，$\therefore AG\perp CE$.

过点 G 作 $GH\perp EC$，垂足为 H，连接 AH.

$\because AG\cap GH=G$，$\therefore EC\perp$平面 AHG.

$\angle AHG$ 即为二面角 P-CE-A 的平面角. ………………………………（8 分）

在 Rt$\triangle ACD$ 中，易得 $AC=\sqrt{3}$，$\therefore AG=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{3}{2}$，

在 Rt$\triangle PCD$ 中，$PD=2$，$CE=\frac{1}{2}PD=1$，

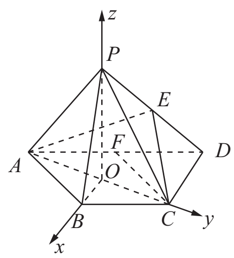
$\because EG$ 为$\triangle PCD$ 的中位线，$\therefore EG/\!/CD$，$\therefore EG\perp PC$，则 $GH=\frac{EG\times CG}{CE}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

$\tan\angle AHG=\frac{AG}{GH}=2\sqrt{3}$，所以 $\cos\angle AHG=\frac{\sqrt{13}}{13}$. ………………………………（11 分）

所以二面角 P-CE-A 的余弦值为$\frac{\sqrt{13}}{13}$. ………………………………（12 分）

方法 2：取 AC 的中点 O，$\because PO\perp AC$，$\therefore PO\perp$平面 $ABCD$. $\because AB=BC$，$\therefore OB\perp OC$.

以点 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$方向为 x 轴正方向，$\overrightarrow{OC}$方向为 y 轴正方向，$\overrightarrow{OP}$方向为 z 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系. ………………………………（6 分）



$P\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$,$A\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$, $C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$, $D\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$E\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$

$\overrightarrow{PC}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$,$\overrightarrow{CE}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$,$\overrightarrow{AC}=(0,\sqrt{3},0)$,………………（8 分）

设平面 PCE 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$取 $z_1=1$,得 $\overrightarrow{n_1}=(0,\sqrt{3},1)$.

设平面 ACE 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$取 $z_2=2$,得 $\overrightarrow{n_2}=(3,0,2)$. ……………………………………………………（10 分）

$\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\sqrt{13}}{13}$, ……………………………………………………（11 分）

易知二面角 A-DF-C 为锐角,所以二面角 A-DF-C 的余弦值为$\frac{\sqrt{13}}{13}$. ……………………………（12 分）

19.【解析】(1)$\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-B\right)=\sin^2\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$, ……………………………………………（2 分）

因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$,$\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,

所以 $\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,此时 $B+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$,解得 $B=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………（6 分）

(2)若选择条件①,

由正弦定理,$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+c}{\sin A+\sin C}=\frac{3}{\sin A+\sin C}$,

而 $\sin A+\sin C=\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$, ………………………（8 分）

因为△ABC 为钝角三角形,不妨设 $A\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$, 则 $A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$,$\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

故 $\sin A+\sin C\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$,

△ABC 外接圆的半径为 $R=\frac{3}{2(\sin A+\sin C)}\in(1,\sqrt{3})$. ……………………………………………（12 分）

若选择条件②,

因为△ABC 为钝角三角形,由 $a-c=3$ 及 $B=\frac{\pi}{3}$知角 A 必为钝角,即 $b^2+c^2-a^2<0(*)$, ……（7 分）

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$,代入(*)式得 $2c^2-ac<0$, 故 $a>2c$.

所以 $3=a-c>c$,得 $c\in(0,3)$, ……………………………………………………………（10 分）

故 $b^2=a^2+c^2-ac=(a-c)^2+ac=9+(c+3)c=c^2+3c+9\in(9,27)$,可得 $b\in(3,3\sqrt{3})$

由正弦定理得 $R=\frac{b}{2\sin B}=\frac{1}{\sqrt{3}}b\in(\sqrt{3},3)$. ……………………………………………………（12 分）

20.【解析】(1)设倒数第 1,2,3,4 柱高的公比为 $q(q>1)$,

则$\frac{0.05(1-q^4)}{1-q}=0.75$,即$(1+q^2)(1+q)=15$,

记函数 $f(q)=1+q+q^2+q^3$,$q>1$,

该函数在定义域上单调递增且 $f(2)=15$，故 $q=2$. ……………………………………………………（3 分）

利用频率分布直方图的信息可估计该班的一分钟踢毽子的平均值为

$\mu=15\times0.09+25\times0.16+35\times0.4+45\times0.2+55\times0.1+65\times0.05=37.1$， ……………………（4 分）

因为 $37.1>37$，所以 A 班能达到优秀标准. ………………………………………………………（5 分）

(2) a 同学若是选择甲方式，记得分为 X，X 可能的取值为 9，5，4，0.

$P(X=9)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$，$P(X=5)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$，

$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$，$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$，

得分的期望值为 $E(X)=9\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}=6.3$. ……………………………………（8 分）

a 同学若是选择乙方式，记得分为 Y，Y 可能的取值为 10，5，4，0.

$P(X=10)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$，$P(X=5)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{11}{50}$，

$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$，$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$，

得分的期望值为 $E(Y)=10\times\frac{12}{25}+5\times\frac{11}{50}+4\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}=6.7$. ……………………………………（11 分）

因为 $E(Y)>E(X)$，所以 a 同学该选择乙方式. ………………………………………………………（12 分）

21.【解析】(1) 圆心 O 到直线 l_1 的距离为 $d=\sqrt{b^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\left|\frac{1}{2}b\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$，解得 $b^2=1$，

联立 $\begin{cases}b=1,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ c^2=a^2-b^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$ 故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………（4 分）

(2) 由 (1) 可知，点 $A(0,1)$，$B(0,-1)$，直线 l_2 的方程为 $y=kx+1(k<0)$，设点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+k^2)x^2+2kx=0$，所以 $x_1=\frac{-2k}{k^2+1}$，$y_1=kx_1+1=\frac{-k^2+1}{k^2+1}$，

联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kx=0$，所以 $x_2=\frac{-8k}{4k^2+1}$，$y_2=kx_2+1=\frac{-4k^2+1}{4k^2+1}$，

$k_1+\frac{1}{4k_2}=\frac{y_1+1}{x_1}+\frac{x_2}{4(y_2+1)}=\frac{\frac{2}{k^2+1}}{\frac{-2k}{k^2+1}}+\frac{\frac{-8k}{4k^2+1}}{\frac{8}{4k^2+1}}=-\frac{1}{k}-k$. ……………………………………（8 分）

由 $-\frac{1}{k}-k\in\left[2,\frac{5}{2}\right)$，得 $k\in\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$， ……………………………………………………（9 分）

$S_{\triangle BPQ}=S_{\triangle ABQ}-S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}|AB|(x_2-x_1)=x_2-x_1=\frac{-8k}{4k^2+1}-\frac{-2k}{k^2+1}=\frac{-6k}{(4k^2+1)(k^2+1)}$. …（10 分）

令函数 $f(k)=\frac{-6k}{(4k^2+1)(k^2+1)}$，

$f'(k)=\frac{6(12k^4+5k^2-1)}{[(4k^2+1)(k^2+1)]^2}>0$，所以函数 $f(k)$ 在 $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，$f(-2)=\frac{12}{85}$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{5}$，

所以$\triangle BPQ$面积的取值范围为$\left(\frac{12}{85},\frac{6}{5}\right)$. ……………………………………………………………（12 分）

22.【解析】(1)$f'(x)=e^x-x$,设 $p(x)=f'(x)$,则 $p'(x)=e^x-1>0$,

所以 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，故 $f'(x)>f'(0)=1$,即 $\tan\theta>1$，因此 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. ……（4 分）

(2)令 $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{6}{5}\sin x$，$x\in(-2,+\infty)$，

则 $h'(x)=e^x-x-1-\frac{6}{5}\cos x$，设函数 $\varphi(x)=h'(x)$,得 $\varphi'(x)=e^x-1+\frac{6}{5}\sin x$,

当 $x\in(-2,0]$时,$e^x-1\leqslant 0,\sin x\leqslant 0,\varphi'(x)\leqslant 0$;

当 $x\in(0,\pi)$时,$e^x-1>0,\sin x>0,\varphi'(x)>0$;

当 $x\in[\pi,+\infty)$时,$\varphi'(x)=e^x-1+\frac{6}{5}\sin x>e-1-\frac{6}{5}>0$.

所以 $\varphi(x)$在$(-2,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增,$\varphi(x)_{\min}=\varphi(0)=-\frac{6}{5}<0$, …………（6 分）

$\varphi(-2)=e^{-2}+1-\frac{6}{5}\cos 2>0$，所以$\exists x_1\in(-2,0)$，使得 $\varphi(x_1)=0$.

又 $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{4}-1-\frac{6}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 2.19-\frac{3.14}{4}-1-0.6\times 1.41=-0.441<0$.

$\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{\frac{\pi}{3}}-\frac{\pi}{3}-1-\frac{6}{5}\times\frac{1}{2}\approx 2.85-\frac{3.14}{3}-1-0.6\approx 0.203>0$.

所以$\exists x_2\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$，使得 $\varphi(x_2)=0$. ……………………………………………………………（8 分）

函数 $h(x)$的单调性及极值情况如下表：

x	$(-2,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

因为 $h(-2)=e^{-2}-\frac{6}{5}\sin(-2)=e^{-2}+\frac{6}{5}\sin 2>0$,所以只需证明 $h(x_2)>0$. ……………………（9 分）

由 $h'(x_2)=0$,得 $e^{x_2}-x_2=1+\frac{6}{5}\cos x_2$，

所以 $h(x_2)=e^{x_2}-\frac{1}{2}x_2^2-x_2-\frac{6}{5}\sin x_2=1+\frac{6}{5}\cos x_2-\frac{6}{5}\sin x_2-\frac{1}{2}x_2^2$.

令 $m(t)=1+\frac{6\sqrt{2}}{5}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}t^2$，$t\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$，

因为 $m(t)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$上单调递减，

所以 $h(x_2)=m(x_2)>m\left(\frac{\pi}{3}\right)=1+\frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\pi^2}{18}\approx 1.6-0.6\times 1.73-\frac{3.14^2}{18}\approx 0.014>0$,

所以 $h(x)>0$ 对于 $x\in(-2,+\infty)$恒成立，即 $f(x)>g(x)$对于 $x\in(-2,+\infty)$恒成立. ……（12 分）