湖北省黄冈中学2022届高三第二次模拟考试

数学试卷

命题教师：潘小华 周永林　审题教师：尹念军 席建颖

考试时间：2022年5月17日下午15:00-17:00　试卷满分：150

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知复数 z 满足 $(-3i)z=4-5i$，则 z 的共轭复数的虚部为

A．$\frac{4i}{3}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$-\frac{4}{3}$　　D．$-\frac{4i}{3}$

【答案】C

【解析】$\because (-3i)z=4-5i$，$\therefore z=\frac{4-5i}{-3i}=\frac{(4-5i)i}{(-3i)i}=\frac{5+4i}{3}=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}i$，$\therefore z$ 的共轭复数的虚部为 $-\frac{4}{3}$．故选：C．

2. 设集合 $A=\{x\,|\,(x-1)(x-4)<0\}$，$B=\{x\,|\,2x+a<0\}$，且 $A\cap B=\{x\,|\,1<x<2\}$，则 $a=$

A．4　　B．2　　C．-2　　D．-4

【答案】D

【解析】集合 $A=\{x\,|\,(x-1)(x-4)<0\}=\{x\,|\,1<x<4\}$，$B=\{x\,|\,2x+a<0\}=\{x\,|\,x<-\frac{a}{2}\}$，

$A\cap B=\{x\,|\,1<x<2\}$，$\therefore -\frac{a}{2}=2$，解得 $a=-4$．故选：D．

3. 已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$，$b=\log_2\frac{1}{3}$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$　　C．$c>a>b$　　D．$c>b>a$

【答案】C

【解析】$\because 0<a=2^{-\frac{1}{3}}<2^0=1$，$b=\log_2\frac{1}{3}<\log_2 1=0$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_2 3>\log_2 2=1$，$\therefore c>a>b$．

故选：C．

4. 已知 A，B，C 是表面积为 16π 的球 O 的球面上的三个点，且 $AC=AB=1$，$\angle ABC=30^\circ$，则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为

A．$\frac{1}{12}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{12}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{4}$

【答案】C

【解析】设球的半径为 R，ΔABC 外接圆的半径为 r，

在 ΔABC 中，由 $AC=AB=1$，$\angle ABC=30^\circ$，则 $\angle BAC=120^\circ$

得 $2r=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=2$，所以 $r=1$，因为球 O 的表面积为 16π，则 $4\pi R^2=16\pi$，解得 $R=2$，

所以球心 O 到 ΔABC 的距离 $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{3}$，即三棱锥 $O-ABC$ 的高为 $\sqrt{3}$，

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，所以三棱锥 $O-ABC$ 的体积 $V_{O-ABC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{3}=\dfrac{1}{4}$．

故选：C．

5. 已知函数 $f(x)=xln(e^{2x}+1)-x^2+1$，$f(a)=2$，则 $f(-a)$ 的值为

A．1　　　　B．0　　　　C．-1　　　　D．-2

【答案】B

【解析】构造函数 $g(x)=xln(e^{2x}+1)-x^2$，则 $g(-x)+g(x)=-xln(e^{-2x}+1)-x^2+xln(e^{2x}+1)-x^2$

$=xln\dfrac{e^{2x}+1}{e^{-2x}+1}-2x^2=xlne^{2x}-2x^2=0$，故函数 $g(x)$ 为奇函数，又 $f(a)=g(a)+1=2$，

$\therefore g(a)=1\therefore f(-a)=g(-a)=-g(a)+1=0$，故选：$B$．

6. 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，$0<\alpha<\pi$，则 $\sin2\alpha+\cos2\alpha=$

A．$\dfrac{17}{25}$　　　　B．$-\dfrac{17}{25}$　　　　C．$\dfrac{31}{25}$　　　　D．$-\dfrac{31}{25}$

【答案】D

【解析】因为 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，两边同平方可得，$1+\sin2\alpha=\dfrac{1}{25}$，所以 $\sin2\alpha=-\dfrac{24}{25}<0$，

因为 $0<\alpha<\pi$，则 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，故 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-\sin2\alpha=\dfrac{49}{25}$，

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{7}{5}$，故 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=\dfrac{1}{5}\times(-\dfrac{7}{5})=-\dfrac{7}{25}$，

即 $\cos2\alpha=-\dfrac{7}{25}$，所以 $\sin2\alpha+\cos2\alpha=-\dfrac{24}{25}-\dfrac{7}{25}=-\dfrac{31}{25}$．故选：$D$．

7. 直线 $x=2$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线交于 A，B 两点，设 P 为双曲线上任一点，若 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$($a$，$b\in R$，$O$ 为坐标原点)，则下列不等式恒成立的是

A．$a^2+b^2\geqslant1$　　　　B．$|ab|\geqslant1$　　　　C．$|a+b|\geqslant1$　　　　D．$|a-b|\geqslant2$

【答案】C

【解析】双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线为：$y=\pm\dfrac{1}{2}x$．把 $x=2$ 代入上述方程可得：$y=\pm1$．

不妨取 $A(2,1)$，$B(2,-1)$．$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}=(2a+2b,a-b)$．代入双曲线方程可得：

$\dfrac{(2a+2b)^2}{4}-(a-b)^2=1$，化为 $ab=\dfrac{1}{4}$．$\therefore\dfrac{1}{4}=ab\leqslant(\dfrac{a+b}{2})^2$，化为：$|a+b|\geqslant1$．故选：$C$．

8. 若函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象上存在两个不同的点 A，B，使得曲线 $y=f\left(x\right)$ 在这两点处的切线重合，则称函数 $y=f(x)$ 为“共切”函数，下列函数中是“共切”函数的为

A． $y=\ln x+x$　　B． $y=\mathrm{e}^x+x$　　C． $y=x^3+1$　　D． $y=x-\cos x$

【答案】D

【解析】由“共切”函数的定义可知，导函数中自变量存在两个值，它们的函数值相等，才可能是“共切”函数，因此导数不会为单调函数；

对于A， $y'=\dfrac{1}{x}+1$，即导函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且自变量与函数值是一一对应的关系，故 $y=\ln x+x$ 不会是“共切”函数；

对于B， $y'=\mathrm{e}^x$，即导函数在R上单调递增，故 $y=\mathrm{e}^x+1$ 必不是“共切”函数；

对于C， $y'=3x^2$，存在 (m,m^3) 与 $(-m$， $-m^3)(m\neq 0)$，两点处的切线斜率为 $3m^2$ 相等，

分别写出切线方程为： $y=3m^2\cdot x-2m^3$， $y=3m^2\cdot x+2m^3$，

显然两直线不重合，故 $y=x^3$ 不是“共切”函数；

对于D， $y'=1+\sin x\in[0$， $2]$，即导函数为 $T=2\pi$ 的周期函数，且 $y'\geq 0$ 恒成立，

故 $y=x-\cos x$ 在R上递增，

不妨取 $x_A=0,x_B=2\pi$ ，则 $y'=1$ ，切点分别为 $A(0,-1),B(2\pi,2\pi-1)$ ，

此时切线方程分别为 $y=x-1,y=x-2\pi+2\pi-1=x-1$ ，两切线重合，

可知至少存在A、B 两点处的切线重合，故该函数为“共切”函数.

故选：D.

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知由样本数据 $(x_i$， $y_i)(i=1$，2，3，…，10) 组成的一个样本，得到回归直线方程为 $\hat{y}=2x-0.4$，且 $\overline{x}=2$，去除两个样本点 $(-2,1)$ 和 $(2,-1)$ 后，得到新的回归直线的斜率为 3. 则下列说法正确的是

A．相关变量 x， y 具有正相关关系

B．去除两个样本点后的回归直线方程为 $\hat{y}=3x-3$

C．去除两个样本点后，随 x 值增加相关变量 y 值增加速度变小

D．去除两个样本点后，样本$(4,8.9)$的残差为 0.1

【答案】AB

【解析】：对于A，去除两个歧义点$(-2,1)$和$(2,-1)$后，得到新的回归直线的斜率为 3，$3>0$，则相关变量x，y具有正相关关系，故A正确，

对于B，由$\overline{x}=2$代入$y=2x-4$得$\overline{y}=3.6$，则去除两个歧义点$(-2,1)$和$(2,-1)$后，得到新的$\overline{X}=\dfrac{2\times 10}{8}=\dfrac{5}{2}$，$\overline{Y}=\dfrac{3.6\times 10}{8}=\dfrac{9}{2}$，$\hat{a}=\dfrac{9}{2}-3\times\dfrac{5}{2}=-3$，故去除歧义点后的回归直线方程为$\hat{y}=3x-3$，故$B$正确，

对于C，由于斜率为$3>1$，故相关变量x，y具有正相关关系且去除歧义点后，随x值增加相关变量y值增加速度变大，故C错误，

当$x=4$时，$y=3\times 4-3=9$，则样本$(4,8.9)$的残差为$8.9-9=-0.1$，故D错误．故选：AB．

10. 已知点$M(1,0)$，A，B是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$上的动点，当$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BA}$取下列哪些值时，可以使$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

A．3　　　B．6　　　C．9　　　D．12

【答案】ABC

【解析】设$A(x_0，\ y_0)$，且$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BM}=0$，

$\because\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA})=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA}^2=(x_0-1)^2+y_0^2$①，

将A点坐标代入椭圆，可得$\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，则$y_0^2=1-\dfrac{x_0^2}{4}$代入①可得，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BA}=(x_0-1)^2+1-\dfrac{x_0^2}{4}=\dfrac{3}{4}(x_0-\dfrac{4}{3})^2+\dfrac{2}{3}(-2\leqslant x_0\leqslant 2)$，故$(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BA})_{min}=\dfrac{2}{3}$，$(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BA})_{max}=9$，

对照选项，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BA}$可以取$ABC$．故选：$ABC$．

11．设函数$f(x)=\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{\cos x}$，则

A．$f(x)$在$(-\dfrac{\pi}{2}，\ \dfrac{\pi}{2})$上有且仅有 1 个零点

B．$f(x)$的最小正周期为π

C．$f(x)$在$(-\dfrac{\pi}{2}，\ \dfrac{\pi}{2})$上单调递减

D．$f(x)$在$(\dfrac{\pi}{2}，\ \dfrac{3\pi}{2})$上单调递减

【答案】ACD

【解析】由二倍角公式可得，$\sin 2x=2\sin x\cos x$，

$\because\ f(x)=\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{\cos x}=\dfrac{2\sin x(\cos x-1)}{\cos x}=0$，$\therefore\sin x=0$或$\cos x=1$，$\therefore x=k\pi$或$x=2k\pi$，

$k\in Z$，

$\because x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，$\therefore$当且仅当$k=0$时，即$x=0$时，满足$f(x)=0$，

$\therefore f(x)$在$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$上有且只有一个零点，满足题意，则$A$正确，

$f(x)=2\sin x-2\tan x$，$\because \sin x$的最小正周期为2π，$\tan x$的最小正周期为π，

$\therefore f(x)$的最小正周期为2π，则B错误，

$f(x)=2\sin x-2\tan x$，则$f'(x)=2\cos x-\dfrac{2[cos^2x-(-\sin x)\cdot\sin x]}{(\cos x)^2}=\dfrac{2(cos^3x-1)}{cos^2x}$，

$\because \cos^3x-1\leqslant 0\ \therefore f'(x)\leqslant 0$，$\therefore f(x)$在恒单调递减，则$C$、$D$正确，故选：$ACD$.

12．在数列$\{a_n\}$中，对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$都有$a_n>0$，且$a_{n+1}^2-a_{n+1}=a_n$，则下列结论正确的是

A．对于任意的$n\ge 2$，都有$a_n>1$

B．对于任意的$a_1>0$，数列$\{a_n\}$不可能为常数列

C．若$0<a_1<2$，则数列$\{a_n\}$为递增数列

D．若$a_1>2$，则当$n\ge 2$时，$2<a_n<a_1$

【答案】ACD

【解析】A：由$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+1$，对$\forall n\in\mathbf{N}^*$有$a_n>0$，则$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+1>1$，即任意$n\ge 2$都有$a_n>1$，正确；

B：由$a_{n+1}(a_{n+1}-1)=a_n$，若$\{a_n\}$为常数列且$a_n>0$，则$a_n=2$满足$a_1>0$，错误；

C：由$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=a_{n+1}-1$且$n\in\mathbf{N}^*$，

当$1<a_{n+1}<2$时$0<\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<1$，此时$a_1=a_2(a_2-1)\in(0,2)$且$a_1<a_2$，数列$\{a_n\}$递增；

当$a_{n+1}>2$时$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>1$，此时$a_1=a_2(a_2-1)>a_2>2$，数列$\{a_n\}$递减；

所以$0<a_1<2$时数列$\{a_n\}$为递增数列，正确；

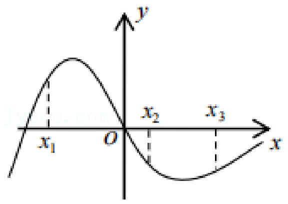
D：由C分析知：$a_1>2$时$a_{n+1}>2$且数列$\{a_n\}$递减，即$n\ge 2$时$2<a_n<a_1$，正确.

故选：ACD

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 函数$f(x)$的图象如图所示，记$A=f'(x_1)$、$B=f'(x_2)$、$C=f'(x_3)$，则A、B、C最大的

是________.



【答案】A

【解析】根据导数的几何意义，$f'(x_1)$、$f'(x_2)$、$f'(x_3)$ 分别为 x_1、x_2、x_3 处的切线斜率，

又 x_1 与 x_3 处的切线单调递增，x_2 处的切线单调递减，且 x_1 处的切线比 x_3 处的切线更陡峭，

$\therefore f'(x_2)<0<f'(x_3)<f'(x_1)$，故最大为 $f'(x_1)$．

14. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中，唯有 x^3 的系数最大，则 $(1+x)^n$ 的系数和为__64__.

【答案】64

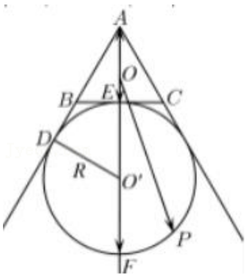
【解析】由题意，$C_n^3>C_n^2$，且 $C_n^3>C_n^4$，所以 $n=6$，所以令 $x=1$，$(1+x)^6$ 的系数和为 $2^6=64$．

15. 与三角形的一边及另外两边的延长线都相切的圆，称为这个三角形的旁切圆.已知正 ΔABC 的中心为 O，$AB=1$，点 P 为与 BC 边相切的旁切圆上的动点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的取值范围为________.

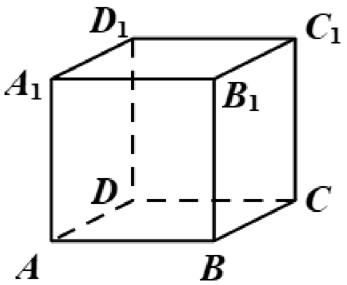
【答案】$[-\frac{7}{6}$，$-\frac{1}{6}]$

【解析】如图所示，ΔABC 的旁切圆为圆 O'，设其半径为 R，因为正 ΔABC 的边长为 1，所以 $|AE|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，易知 O 为 ΔABC 的重心，则 $|OA|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$|OE|=\frac{\sqrt{3}}{6}$，易知 ΔABO 与△ $AO'D$ 相似，则 $\frac{|AE|}{|AD|}=\frac{|BE|}{|O'D|}$，即 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{R}$，解得 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由平面向量数量积的几何意义可知：

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$，表示 $\overrightarrow{OP}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 上的投影与 $|\overrightarrow{OA}|=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的乘积，由图可知，当点 P 位于点 E 时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$ 最大，最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{6})=-\frac{1}{6}$，当点 P 位于点 F 时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$ 最小，最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2)=-\frac{7}{6}$，故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的取值范围是 $[-\frac{7}{6}$，$-\frac{1}{6}]$，故答案为：$[-\frac{7}{6}$，$-\frac{1}{6}]$．



16. 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 P 沿正方形 $ABCD$ 按 $ABCDA$ 的方向作匀速运动，点 Q 沿正方形 B_1C_1CB 按 $B_1C_1CBB_1$ 的方向以同样的速度作匀速运动，且点 P,Q 分别从点 A 与点 B_1 同时出发，则 PQ 的中点的轨迹所围成图形的面积大小是________.



【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

【解析】如图，E,F,G 分别是正方形 $ABCD$，ABB_1A_1，BCC_1B_1 的中心，下面进行证明：菱形 $EFGC$ 的周界即为动线段 PQ 的中点 H 的轨迹，

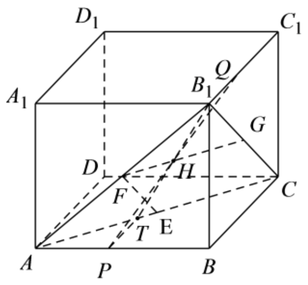
首先证明：如果点 H 是动线段 PQ 的中点，那么点 H 必在菱形 $EFGC$ 的周界上，

分两种情况证明：（1）P，Q 分别在某一个定角的两边上，不失一般性，设 P 从 B 到 C，而 Q 同时从 C_1 到 C，由于速度相同，所以 PQ 必平行于 BC_1，故 PQ 的中点 H 必在 CG 上；

（2）P，Q 分别在两条异面直线上，不失一般性，设 P 从 A 到 B，同时 Q 从 B_1 到 C_1，由于速度相同，则 $AP=B_1Q$，由于 H 为 PQ 的中点，连接 B_1H 并延长，交底面 $ABCD$ 于点 T，连接 PT，则平面 PB_1QT 与平面 $ABCD$ 交线是 PT，

$\because B_1C_1 \parallel$ 平面 $ABCD$，$\therefore B_1C_1 \parallel PT$，$\therefore \triangle HB_1Q \cong \triangle HTP$，而 $PT=B_1Q=AP$，$PT \parallel BC$，

$\therefore \triangle APT$ 是等腰直角三角形，$\angle TAP=\dfrac{\pi}{4}$，从而 T 在 AC 上，可以证明 $FH \parallel TC \parallel AC$，$GH \parallel TC \parallel AC$，$FG \parallel AC$，基于平行线的唯一性，显然 H 在 FG 上，

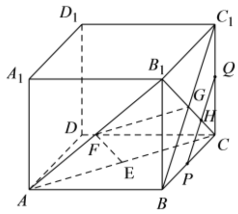


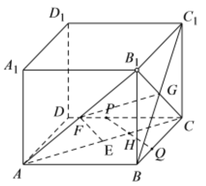
综合（1）（2）可证明，线段 PQ 的中点一定在菱形 $EFGC$ 的周界上；

下面证明：如果点 H 在菱形 $EFGC$ 的周界上，则点 H 必定是符合条件的线段的中点.

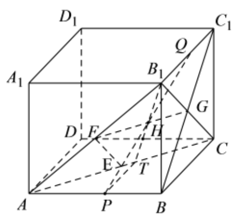
也分两种情况进行证明：

（1）H 在 CG 或 CE 上，过点 H 作 $PQ /\!/ BC_1$（或 BD），而与 BC 及 CC_1（或 CD 及 BC）分别相交于 P 和 Q，由相似的性质可得：$PH=QH$，即 H 是 PQ 的中点，同时可证：$BP=C_1Q$（或 $BQ=DP$），因此 P、Q 符合题设条件





（2）H 在 EF 或 FG 上，不失一般性，设 H 在 FG 上，连接 B_1H 并延长，交平面 AC 于点 T，显然 T 在 AC 上，过 T 作 $TP /\!/ CB$ 于点 P，则 $TP /\!/ C_1B_1$，在平面 PTC_1B_1 上，连接 PH 并延长，交 B_1C_1 于点 Q，在三角形 ACB_1 中，G 是 B_1C 的中点，$FG /\!/ AC$，则 H 是 B_1T 的中点，于是 $\triangle PTH \cong \triangle QB_1H$，从而有 $B_1Q = PT$，又因为 $TP /\!/ CB$，$\angle CAB = \angle ATP = \dfrac{\pi}{4}$，所以 $AP = PT$，从而 $B_1Q = AP$，因此 P，Q 符合题设条件.



由（1）（2），如果 H 是菱形 $EFGC$ 周界上的任一点，则 H 必是符合题设条件的动线段 PQ 的中点，证毕.

因为四边形 $EFGC$ 为菱形，其中 $CE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{1+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 且

$AC=CB_1=AB_1$，$\triangle AB_1C$ 为等边三角形，$\angle GCE=\frac{\pi}{3}$，所以面积 $S=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{4}$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$c=2$．有以下 3 个条件：

① $2c\cos A=b$；② $2b-a=2c\cos A$；③ $a+b=2c$．

请在以上 3 个条件中选择一个，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

解：若选择①

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 可将 $2c\cos A=b$ 化为：$2\sin C\cos A=\sin B$

又 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin B=\sin(A+C)$，所以 $2\sin C\cos A=\sin(A+C)$

即 $\sin A\cos C-\cos A\sin C=0$，

$\therefore\sin(A-C)=0$，$\therefore A=C$，$\therefore a=c=2$，…………………………5 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=2\sin B\le 2$（当 $B=\frac{\pi}{2}$ 时取到等号）

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 2．…………………………10 分

若选择②

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 可将 $2b-a=2c\cos A$ 化为：

$2\sin B-\sin A=2\sin C\cos A$，又 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin B=\sin(A+C)$

所以 $2\sin(A+C)-\sin A=2\sin C\cos A$，即 $2\sin A\cos C=\sin A$，$\therefore\cos C=\frac{1}{2}$

又 $C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$ …………………………5 分

又由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 可得：

$4=a^2+b^2-ab\ge 2ab-ab=ab$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C\le 2\sin C=\sqrt{3}$，所以$\triangle ABC$面积的最大值为$\sqrt{3}$．………………10 分

若选择③

因为$c=2$，所以$a+b=2c=4\ge 2\sqrt{ab}$，$\therefore ab\le 4$（当且仅当$a=b$时取等号）………2 分

又由余弦定理$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$得：

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{2ab}=\frac{\frac{3}{4}\left(a^2+b^2\right)-\frac{1}{2}ab}{2ab}\ge\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$$（当且仅当$a=b$时取等号）

$\therefore 0<C\le\frac{\pi}{3}$…………………………5 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C\le\frac{1}{2}\times 4\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$（当且仅当$a=b$时取等号）

所以$\triangle ABC$面积的最大值为$\sqrt{3}$．…………………………10 分

18.（本小题满分 12 分）

数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$a_{n+1}=2S_n(n\in N^*)$, ,

（1）求数列$\{a_n\}$的通项a_n;

（2）求数列$\{na_n\}$的前 n 项和T_n.

【解析】（1）$\because a_{n+1}=2S_n$，,$\therefore S_{n+1}-S_n=2S_n$ $\therefore\frac{S_{n+1}}{S_n}=3$.又$\because S_1=a_1=1$,

$\therefore$数列$\{S_n\}$是首项为 1、公比为 3 的等比数列，$S_n=3^{n-1}\ (n\in N^*)$.…………………2 分

$\therefore$当$n\ge 2$时，$a_n=2S_{n-1}=2\cdot 3^{n-2}(n\ge 2)$,$\therefore a_n=\begin{cases}1, n=1\\ 2\cdot 3^{n-2}, n\ge 2\end{cases}$……………………5 分

（2）$T_n=a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n$，

当$n=1$时，$T_1=1$；…………………………6 分

当$n\geqslant 2$时，$T_n=1+4\bullet 3^0+6\bullet 3^1+\ldots+2n\bullet 3^{n-2}$，…①

$3T_n=3+4\bullet 3^1+6\bullet 3^2+\ldots+2n\bullet 3^{n-1}$，…②

①－②得：

$$-2T_n=-2+4+2(3^1+3^2+\ldots+3^{n-2})-2n\bullet 3^{n-1}=2+2\bullet\frac{3(1-3^{n-2})}{1-3}-2n\bullet 3^{n-1}=-1+(1-2n)\bullet 3^{n-1},$$

$\therefore T_n=\frac{1}{2}+(n-\frac{1}{2})3^{n-1}(n\geqslant 2)$，……………………………10 分

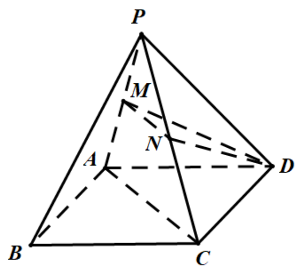
又 $\because T_1=a_1=1$ 也满足上式，$\therefore T_n=\frac{1}{2}+(n-\frac{1}{2})3^{n-1}(n\in N^*)$．……………………………12 分

19．（本小题满分 12 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形，平面 $PAC\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=PC=2\sqrt{2}$．

（1）求证：$PB=PD$；

（2）若点 M,N 分别是棱 PA,PC 的中点,平面 DMN 与棱 PB 的交点为 Q，则在线段 BC 上是否存在一点 H，使得 $DQ\perp PH$，若存在，求 BH 的长,若不存在,请说明理由.



【解析】（1）证明：记 $AC\cap BD=O$，连结 PO，$\because$ 底面 ABC 为正方形，

$\therefore OA=OC=OB=OD=2$．

$\because PA=PC$，$\therefore PO\perp AC$，$\because$ 平面 $PAC\cap$ 底面 $ABCD=AC$，$PO\subset$ 平面 PAC，

$\therefore PO\perp$ 底面 $ABCD$．$\because BD\subset$ 底面 $ABCD$，$\therefore PO\perp BD$．$\therefore PB=PD$；………………5 分

（2）以 O 为坐标原点，射线 OB，OC，OP 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系如图所示，由（1）可知 $OP=2$．可得 $P(0,0,2)$，$A(0,-2,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D(-2,0,0)$，可得，$M(0,-1,1)$，$N(0,1,1)$．

$\overrightarrow{DM}=(2,-1,1)$，$\overrightarrow{MN}=(0,2,0)$．

设平面 DMN 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}=2x-y+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}=2y=0\end{cases}$，令 $x=1$，可得 $\vec{n}=(1,0,-2)$．……………………………7 分

记 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PB}=(2\lambda,0,-2\lambda)$，可得 $Q(2\lambda，0，2-2\lambda)$，$\overrightarrow{DQ}=(2\lambda+2,0,2-2\lambda)$，

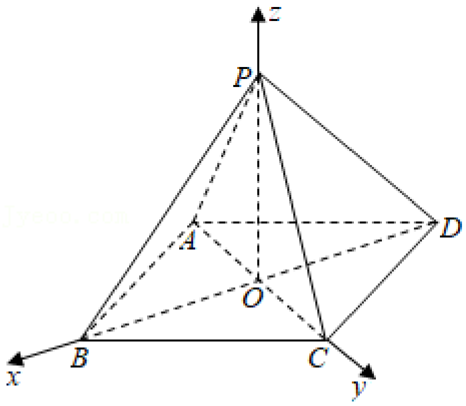
由 $\overrightarrow{DQ}\cdot\vec{n}=0$，可得，$2\lambda+2-4+4\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$．可得，$\overrightarrow{DQ}=(\frac{8}{3},0,\frac{4}{3})$．……………9 分

记 $\overrightarrow{BH}=t\overrightarrow{BC}=(-2t,2t,0)$，可得 $H(2-2t，2t，0)$，

$\overrightarrow{PH}=(2-2t,2t,-2)$，若 $DQ\perp PH$，则 $\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{PH}=0$，

$\therefore\frac{8}{3}(2-2t)+\frac{4}{3}\times(-2)=0$，解得 $t=\frac{1}{2}$．

故 $BH=\sqrt{2}$．……………………………12 分



20．（本小题满分 12 分）

根据社会人口学研究发现，一个家庭有 X 个孩子的概率模型为：

X	1	2	3	0
概率	$\frac{\alpha}{p}$	α	$\alpha(1-p)$	$\alpha(1-p)^2$

其中 $\alpha>0$，$0<p<1$．每个孩子的性别是男孩还是女孩的概率均为 $\frac{1}{2}$ 且相互独立，事件 A_i 表示一个家庭有 i 个孩子 $(i=0,1,2,3)$，事件 B 表示一个家庭的男孩比女孩多(例如：一个家庭恰有一个男孩，则该家庭男孩多．)

（1）若 $p=\frac{1}{2}$，求 α，并根据全概率公式 $P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(B|A_i)P(A_i)$，求 $P(B)$；

（2）为了调控未来人口结构，其中参数 p 受到各种因素的影响(例如生育保险的增加，教育、医疗福利的增加等).

①若希望 $P(X=2)$ 增大，如何调控 p 的值？

②是否存在 p 的值使得 $E(X)=\frac{5}{3}$，请说明理由.

【解析】(1) $\frac{\alpha}{p}+\alpha+\alpha(1-p)+\alpha(1-p)^2=1$，$p=\frac{1}{2}$，可得 $\alpha=\frac{4}{15}$ ……………………………2 分

由题意得：$P(B|A_1)=C_1^1\frac{1}{2}$，$P(B|A_2)=C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$，$P(B|A_3)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

由全概率公式，得 $P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(B|A_i)P(A_i)$

$=\frac{1}{2}\frac{\alpha}{p}+C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\alpha+\left(C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)\alpha(1-p)$

$=\frac{1}{2}\frac{\alpha}{p}+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{2}\alpha(1-p)$，又 $p=\frac{1}{2}$，则 $P(B)=\frac{3}{2}\alpha=\frac{2}{5}$；……………………………5 分

(2)①由 $\frac{\alpha}{p}+\alpha+\alpha(1-p)+\alpha(1-p)^2=1$，得 $\frac{1}{\alpha}=p^2-3p+\frac{1}{p}+3$，……………………………6 分

记 $f(p)=p^2-3p+\frac{1}{p}+3$，$0<p<1$，则 $f'(p)=\frac{2p^3-3p^2-1}{p^2}$，

记 $g(p)=2p^3-3p^2-1$，则 $g'(p)=6p^2-6p=6p(p-1)<0$，

故 $g(p)$ 在 $(0,1)$ 单调递减. $\because g(0)=-1$，$\therefore g(p)<0$，$\therefore f'(p)<0$，$f(p)$ 在 $(0,1)$ 单调递减.

因此增加 p 的取值，$\frac{1}{\alpha}$ 会减小，α 增大，即 $P(X=2)$ 增大. ……………………………8 分

②假设存在 p 使 $E(X)=\frac{\alpha}{p}+2\alpha+3\alpha(1-p)=\frac{5}{3}$，又 $\frac{1}{\alpha}=p^2-3p+\frac{1}{p}+3$，

将上述两式相乘，得 $\frac{1}{p}+5-3p=\frac{5p^2}{3}-5p+\frac{5}{3p}+5$，

化简得，$5p^3-6p^2+2=0$，……………………………9 分

设 $h(p)=5p^3-6p^2+2$，则 $h'(p)=15p^2-12p=3p(5p-4)$，

则 $h(p)$ 在 $\left(0,\frac{4}{5}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{4}{5},1\right)$ 单调递增，$h(p)$ 的最小值为 $h\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{25}>0$，

$\therefore$ 不存在 p_0 使得 $h(p_0)=0$. ……………………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

动点 P 到定点 $F(0,1)$ 的距离比它到直线 $y=-2$ 的距离小 1，设动点 P 的轨迹为曲线 C，过点 F 的直线交曲线 C 于 A,B 两个不同的点，过点 A,B 分别作曲线 C 的切线，且二者相交于点 M.

（1）求曲线 C 的方程；

（2）求证：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MF}=0$；

（3）求ΔABM 的面积的最小值.

【解析】（1）由已知，动点P在直线$y=-2$上方，条件可转化为动点P到定点$F(0,1)$的距离等于它到直线$y=-1$距离,

∴动点P的轨迹是以$F(0,1)$为焦点，直线$y=-1$为准线的抛物线，故其方程为$x^2=4y$. ·····························3 分

（2）证：设直线AB的方程为：$y=kx+1$

由$\begin{cases}x^2=4y\\y=kx+1\end{cases}$得：$x^2-4kx-4=0$，

设$A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$, 则$x_A+x_B=4k$，$x_Ax_B=-4$·····························4 分

由$x^2=4y$得：$y=\frac{1}{4}x^2$，∴$y'=\frac{1}{2}x$

∴直线AM的方程为：$y-\frac{1}{4}x_A^2=\frac{1}{2}x_A(x-x_A)$ ①

直线BM的方程为：$y-\frac{1}{4}x_B^2=\frac{1}{2}x_B(x-x_B)$ ②

①－②得：$\frac{1}{4}(x_B^2-x_A^2)=\frac{1}{2}(x_A-x_B)x+\frac{1}{2}(x_B^2-x_A^2)$，即$x=\frac{x_A+x_B}{2}=2k$

将$x=\frac{x_A+x_B}{2}$代入①得：$y-\frac{1}{4}x_A^2=\frac{1}{2}x_A\frac{x_B-x_A}{2}=\frac{1}{4}x_Ax_B-\frac{1}{4}x_A^2$

∴$y=\frac{1}{4}x_Ax_B=-1$，故$M(2k，-1)$，·····························6 分

∴$\overrightarrow{MF}=(2k，-2)$，$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A，k(x_B-x_A))$

∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MF}=2k(x_B-x_A)-2k(x_B-x_A)=0$·····························8 分

（3）解：由（2）知，点M到AB的距离$d=|MF|=2\sqrt{1+k^2}$

∵$|AB|=|AF|+|BF|=y_A+y_B+2=k(x_A+x_B)+4=4k^2+4$

∴$S=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\times4(k^2+1)\times2\sqrt{1+k^2}=4(1+k^2)^{\frac{3}{2}}\geqslant4$

∴当$k=0$时，ΔABM 的面积有最小值 4. ·····························12 分

22.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\frac{ax^2}{e^x}+\frac{1}{2}x^2-2x(a\in\mathbf{R})$（ $e=2.71828\ldots$是自然对数的底数）.

（1）若 $f(x)$ 在 $x\in(0,2)$ 内有两个极值点，求实数 a 的取值范围；

（2）$a=1$时，讨论关于 x 的方程$\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2+2x\right]\frac{1}{xe^x}+b=|\ln x|\,(b\in\mathbf{R})$ 的根的个数.

【解析】（1）由题意可求得 $f'(x)=\frac{a\left(2x-x^2\right)}{e^x}+x-2=\frac{(x-2)\left(e^x-ax\right)}{e^x}$，

因为 $f(x)$ 在 $x\in(0,2)$ 内有两个极值点，所以 $f'(x)=0$ 在 $x\in(0,2)$ 内有两个不相等的变号根，

即 $e^x-ax=0$ 在 $x\in(0,2)$ 上有两个不相等的变号根. ……………………………2 分

设 $g(x)=e^x-ax$，则 $g'(x)=e^x-a$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$x\in(0,2), g'(x)=e^x-a>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，不符合条件.

②当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=e^x-a=0$ 得 $x=\ln a$，当 $\ln a\geqslant 2$，即 $a\geqslant e^2$ 时，

$x\in(0,2), g'(x)=e^x-a<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，不符合条件；

当 $\ln a\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant 1$ 时，$x\in(0,2), g'(x)=e^x-a>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，不符合条件；当 $0<\ln a<2$，即 $1<a<e^2$ 时，$g(x)$ 在 $(0,\ln a)$ 上单调递减，$(\ln a,2)$ 上单调递增，

若要 $e^x-ax=0$ 在 $x\in(0,2)$ 上有两个不相等的变号根，则$\begin{cases}g(0)>0,\\ g(2)>0,\\ g(\ln a)<0,\\ 0<\ln a<2,\end{cases}$，解得 $e<a<\frac{e^2}{2}$. 综上所述，$e<a<\frac{e^2}{2}$. ……………………………6 分

（2）设 $h(x)=|\ln x|-\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2+2x\right]\frac{1}{xe^x}-b=|\ln x|-\frac{x}{e^{2x}}-b, x\in(0,+\infty)$，

令 $y=\frac{x}{e^{2x}}$，则 $y'=\frac{1-2x}{e^{2x}}$，所以 $y=\frac{x}{e^{2x}}$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减.

（i）当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$\ln x>0$，则 $h(x)=\ln x-\frac{x}{e^{2x}}-b$，所以 $h'(x)=e^{-2x}\left(\frac{e^{2x}}{x}+2x-1\right)$. 因

为$2x-1>0,\dfrac{e^{2x}}{x}>0$，所以$h'(x)>0$，因此$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

（ii）当$x\in(0,1)$时，$\ln x<0$，则$h(x)=-\ln x-\dfrac{x}{e^{2x}}-b$，所以

$h^{'}(x)=e^{-2x}\left(-\dfrac{e^{2x}}{x}+2x-1\right)$. 因为$e^{2x}\in\left(1,e^{2}\right),e^{2x}>1,0<x<1,\therefore\dfrac{e^{2x}}{x}>1,$即$-\dfrac{e^{2x}}{x}<-1,$，

又$2x-1<1,$ 所以$h^{'}(x)=e^{-2x}\left(-\dfrac{e^{2x}}{x}+2x-1\right)<0$，因此$h(x)$在$(0,1)$上单调递减.

综合（i）（ii）可知，当$x\in(0,+\infty)$时，$h(x)\geqslant h(1)=-e^{-2}-b$，…………………………8 分

当$h(1)=-e^{-2}-b>0$，即$b<-e^{-2}$时，$h(x)$没有零点，故关于x的方程根的个数为 0，

当$h(1)=-e^{-2}-b=0$，即$b=-e^{-2}$时，$h(x)$只有一个零点，故关于x的方程根的个数为 1，

当$h(1)=-e^{-2}-b<0$，即$b>-e^{-2}$时，

①当$x\in(1,+\infty)$时，$h(x)=\ln x-\dfrac{x}{e^{2x}}-b>\ln x-\left(\dfrac{1}{e^{2}}+b\right)>\ln x-1-b$，要使$h(x)>0$，可令$\ln x-1-b>0$，即$x\in\left(e^{1+b},+\infty\right)$；

②当$x\in(0,1)$时，$h(x)=-\ln x-\dfrac{x}{e^{2x}}-b\geqslant-\ln x-\left(\dfrac{1}{2}e^{-1}+b\right)>-\ln x-1-b$，要使

$h(x)>0$，

可令$-\ln x-1-b>0$，即$x\in\left(0,e^{-1-b}\right)$，

所以当$b>-e^{-2}$时，$h(x)$有两个零点，故关于x的方程根的个数为 2，

综上所述：当$b<-e^{-2}$时，关于x的方程根的个数为 0，

当$b=-e^{-2}$时，关于x的方程根的个数为 1，

当$b>-e^{-2}$时，关于x的方程根的个数为 2．…………………………12 分