武汉市 2023 届高三年级九月调研考试
数学试卷参考答案及评分标准

选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	A	D	B	A	C	A	AC	ABD	BCD	AD

填空题：

13. 5　　14. $\dfrac{7}{25}$　　15. 8　　16. $3\sqrt{6}+4\sqrt{3}$

解答题：

17.（10 分）解：

（1）当 n 为奇数且 $n\geq 3$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-\dfrac{n+1}{2}-\dfrac{n-1}{2}=-n$，且 $a_1=S_1=-1$，也满足该式；

当 n 为偶数时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n}{2}-(-\dfrac{(n-1)+1}{2})=n$.

综上所述，$a_n=(-1)^n\cdot n$. ………………5 分

（2）$\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(-1)^{2n+1}\cdot n(n+1)}=-\dfrac{1}{n(n+1)}=-(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$.

故 $T_n=-(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=-(1-\dfrac{1}{n+1})=-\dfrac{n}{n+1}$. ………………10 分

18.（12 分）解：

（1）由题意，在 ΔABC 中，$EF\ /\!/\ BC$，故 $EF\perp AB$，在四棱锥 $P-EFCB$ 中，$EF\perp EB$，$EF\perp EP$.

所以 $\angle PEB$ 为二面角 $P-EF-B$ 的平面角，即 $\angle PEB=60^\circ$.

又 $PE=2$，$BE=1$，所以 $PB=\sqrt{PE^2+BE^2-2PE\cdot BE\cdot\cos 60^\circ}=\sqrt{3}$，满足 $PE^2=BE^2+PB^2$.

即 $BE\perp PB$，又 $BE\perp BC$，且 $PB\cap BC=B$，所以 $BE\perp$ 平面 PBC.

又 $BE\subset$ 平面 $EFCB$，所以平面 $PBC\perp$ 平面 $EFCB$. ………………6 分

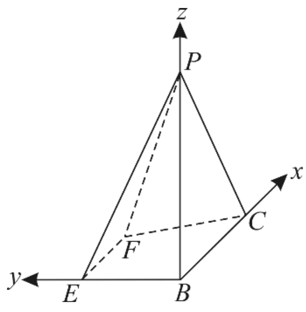
（2）由 $EF\perp EB$，$EF\perp EP$，且 $EB\cap EP=E$，故 $EF\perp$ 平面 PBE，则有 $EF\perp PB$.

又 $EF\ /\!/\ BC$，所以 $BC\perp PB$，即 PB,EB,CB 两两垂直.

以 B 为坐标原点，$\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BP}$ 的方向为 x,y,z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.

则有：$B(0,0,0),E(0,1,0),C(3,0,0),P(0,0,\sqrt{3}),F(2,1,0)$.

$\overrightarrow{BE}=(0,1,0)$.



设平面 PFC 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{PC}=(3,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{FC}=(1,-1,0)$.

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=3x-\sqrt{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{FC}=x-y=0\end{cases}$，令 $y=1$，得 $\vec{n}=(1,1,\sqrt{3})$.

设所求角的大小为 θ，则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{BE},\vec{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{BE}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{|1|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

所以直线 BE 与平面 PFC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ………………12 分

19.（12 分）解：

（1）由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+2\sin C$.

由 $B=\pi-(A+C)$，$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin(A+C)+2\sin C$，

所以 $\sqrt{3}\sin A\sin C=\cos A\sin C+2\sin C$，又 $\sin C\neq 0$，故 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=2$.

即 $\sin(A-\dfrac{\pi}{6})=1$，又 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$. ………………6 分

（2）$\angle CAD=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{6}$. 在 ΔCAD 中，$\dfrac{CD}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{b}{\sin\angle ADC}$；在 ΔBAD 中，$\dfrac{BD}{\sin\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{c}{\sin\angle ADB}$.

又 $\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$，$BD=4CD$，代入得：$c=2b$.

$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{2\pi}{3}}=\sqrt{7}b$，所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. ………………12 分

20.（12 分）解：

（1）$E(\xi)>25$，理由如下：抽奖 10 次时，记中奖次数为 Y，则 $Y\sim B(10,\dfrac{1}{4})$.

若每次中奖的奖金为固定 10 元，则此时总奖金的期望值为 $E(10Y)=10E(Y)=10\times10\times\dfrac{1}{4}=25$.

由题意，连续中奖时，奖金会翻倍，故总奖金必大于每次中奖的奖金为固定 10 元的情况.

所以，$E(\xi)>25$. ………………4 分

（2）X 的所有可能取值为 0，10，20，30，40，70，150.

$P(X=0)=(1-\dfrac{1}{4})^4=\dfrac{81}{256}$；$P(X=10)=C_4^1\dfrac{1}{4}(1-\dfrac{1}{4})^3=\dfrac{108}{256}$；$P(X=20)=3\cdot(\dfrac{1}{4})^2\cdot(1-\dfrac{1}{4})^2=\dfrac{27}{256}$；

$P(X=30)=3\cdot(\dfrac{1}{4})^2\cdot(1-\dfrac{1}{4})^2=\dfrac{27}{256}$； $P(X=40)=2\cdot(\dfrac{1}{4})^3\cdot(1-\dfrac{1}{4})=\dfrac{6}{256}$；

$P(X=70)=2\cdot(\dfrac{1}{4})^3\cdot(1-\dfrac{1}{4})=\dfrac{6}{256}$； $P(X=150)=(\dfrac{1}{4})^4=\dfrac{1}{256}$.

其分布列为：

X	0	10	20	30	40	70	150
P	$\dfrac{81}{256}$	$\dfrac{108}{256}$	$\dfrac{27}{256}$	$\dfrac{27}{256}$	$\dfrac{6}{256}$	$\dfrac{6}{256}$	$\dfrac{1}{256}$

$E(X)=10\times\dfrac{108}{256}+20\times\dfrac{27}{256}+30\times\dfrac{27}{256}+40\times\dfrac{6}{256}+70\times\dfrac{6}{256}+150\times\dfrac{1}{256}=\dfrac{405}{32}$.

………………12 分

21.（12 分）解：

（1）由题意，椭圆的下顶点为 $(0,-1)$，故 $b=1$.

由对称性，椭圆过点 $(-1,\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，代入椭圆方程有 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4}=1$，解得：$a=2$.

故椭圆 E 的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………4 分

（2）设点 T 坐标为 $(0,t)$.

当直线 MN 斜率存在时，设其方程为 $y=k(x+1)-1$，与 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 联立得：

$(4k^2+1)x^2+8k(k-1)x+4k(k-2)=0$.

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-8k(k-1)}{4k^2+1}$， $x_1x_2=\dfrac{4k(k-2)}{4k^2+1}$.

$$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{x_1}{y_1-t}+\frac{x_2}{y_2-t}=\frac{x_1}{kx_1+k-1-t}+\frac{x_2}{kx_2+k-1-t}=\frac{2kx_1x_2+(k-1-t)(x_1+x_2)}{k^2x_1x_2+k(k-1-t)(x_1+x_2)+(k-1-t)^2}$$

$$=\frac{8k^2(k-2)-8k(k-1)(k-1-t)}{4k^3(k-2)-8k^2(k-1)(k-1-t)+(k-1-t)^2(4k^2+1)}=\frac{8tk^2-8(t+1)k}{(4t^2-3)k^2-2(t+1)k+(t+1)^2}.$$

$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$为定值，即与$k$无关，则$(t+1)^2=0$，$t=-1$，此时$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=-8$.

经检验，当直线MN斜率不存在时也满足$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=-8$，故点$T$坐标为$(0,-1)$. ················12 分

22.（12 分）解：

（1）$f'(x)=\frac{1}{k}(x-k-2)e^x-1=\frac{e^x+1}{k}(\frac{(x-2)e^x}{e^x+1}-k)$.

设$g(x)=\frac{(x-2)e^x}{e^x+1}-k$，则$g'(x)=\frac{e^x(e^x+x-1)}{(e^x+1)^2}$.

设$h(x)=e^x+x-1$，显然$h(x)$是增函数，且$h(0)=0$.

故$x<0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$递减；$x>0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$递增.

又$g(0)=-1-k$，且$x<0$时，$g(x)<-k$.

（i）当$-1-k\ge 0$，即$k\le -1$时，$g(x)\ge 0$，$f'(x)\le 0$，$f(x)$递减，此时$f(x)$无极值点；

（ii）当$-1-k<0<-k$，即$-1<k<0$时，存在$x_1<0<x_2$使得$g(x_1)=g(x_2)=0$，

$x<x_1$时，$g(x)>0$，$f'(x)<0$，$f(x)$递减；

$x_1<x<x_2$时，$g(x)<0$，$f'(x)>0$，$f(x)$递增；

$x>x_2$时，$g(x)>0$，$f'(x)<0$，$f(x)$递减. 此时$f(x)$有两个极值点.

（iii）当$-k<0$，即$k>0$时，存在x_0，使得$g(x_0)=0$，

$x<x_0$时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$递减；

$x>x_0$时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$递增. 此时$f(x)$有一个极值点.

综上所述，当$k\le -1$时，$f(x)$无极值点；

当$-1<k<0$时，$f(x)$有两个极值点；

当$k>0$时，$f(x)$有一个极值点. ················6 分

（2）方法一：由（1）知，此时$k>0$，且$f'(x_0)=0$，即$k=\frac{(x_0-2)e^{x_0}}{e^{x_0}+1}$，此时$x_0>2$.

此时$f(x_0)=\frac{e^{x_0}+1}{(x_0-2)e^{x_0}}(x_0-\frac{(x_0-2)e^{x_0}}{e^{x_0}+1}-3)e^{x_0}-x_0=-\frac{e^{x_0}-x_0+3}{x_0-2}-x_0$.

设$\varphi(x)=-\frac{e^x-x+3}{x-2}-x\ (x>2)$，则$\varphi(x)=-\frac{e^x+1}{x-2}-x+1$，

$\varphi'(x)=-\frac{(x-3)e^x-1}{(x-2)^2}-1=-\frac{(x-3)(e^x+x-1)}{(x-2)^2}$，

$x>2$时，$e^x+x-1>0$，令$\varphi'(x)=0$，得$x=3$.

$2<x<3$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$递增；$x>3$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$递减；故$f(x_0)\le\varphi(3)=-e^3-3$.

$f(x_0)$取得最大值时，$x_0=3$，此时$k=\frac{(x_0-2)e^{x_0}}{e^{x_0}+1}=\frac{e^3}{e^3+1}$. ················12 分

方法二：由（1）知，此时$k>0$，且$f'(x_0)=0$，即$k=\frac{(x_0-2)e^{x_0}}{e^{x_0}+1}$，此时$x_0>2$.

此时$f(x)$在$(-\infty,x_0)$递减，在$(x_0,+\infty)$递增.

故$f(x_0)\le f(3)=-e^3-3$，当且仅当$x_0=3$时，$f(x_0)$取得最大值$-e^3-3$.

此时$k=\frac{(x_0-2)e^{x_0}}{e^{x_0}+1}=\frac{e^3}{e^3+1}$. ················12 分