鄂东南省级示范高中教育教学改革联盟学校 2023 年五月模拟考

高三数学试卷

命题学校：黄冈中学　命题教师：肖海东　冯小玮　周建义

审题学校：大冶一中　审题教师：江　猛

考试时间：2023 年 5 月 10 日下午 15:00—17:00　　试卷满分：150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，集合 $B=\{x\mid y=\ln(x+1)\}$，则

A．$A\subseteq \complement_U B$　　B．$\complement_U A\subseteq B$　　C．$(\complement_U A)\cup B=U$　　D．$A\cup B=U$

2. 已知 $2-\mathrm{i}$（i 是虚数单位）是关于 x 的方程 $x^2+bx+c=0(b,c\in\mathbf{R})$ 的一个根，则 $b+c=$

A．9　　B．1　　C．-7　　D．$2\mathrm{i}-5$

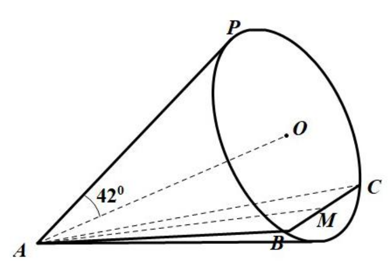
3. 已知向量 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，且 $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{10}$，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为

A．$\frac{1}{4}\vec{a}$　　B．$-\frac{1}{4}\vec{a}$　　C．$\frac{1}{8}\vec{a}$　　D．$-\frac{1}{8}\vec{a}$

4. 函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数 $g(x)$ 是偶函数，则 $\tan\varphi=$

A．$-\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. 用数学的眼光观察世界，神奇的彩虹角约为 42°．如图，眼睛与彩虹之间可以抽象为一个圆锥，设 AO 是眼睛与彩虹中心的连线，AP 是眼睛与彩虹最高点的连线，则称 $\angle OAP$ 为彩虹角．若平面 ABC 为水平面，BC 为彩虹面与水平面的交线，M 为 BC 的中点，$BC=1200$ 米，$AM=800$ 米，则彩虹（$\overset{\frown}{BPC}$）的长度约为



（参考数据：$\sin 42^\circ\approx 0.67$，$\sin 1.1\approx\frac{60}{67}$）

A．$(1340\pi-1474)$米　　B．$(1340\pi-670)$米

C．$(2000\pi-1474)$米　　D．$(2000\pi-670)$米

6. 6 名同学相约在周末参加创建全国文明城市志愿活动，现有交通值守、文明劝导、文艺宣讲三种岗位需要志愿者，其中，交通值守、文明劝导岗位各需 2 人，文艺宣讲岗位需 1 人．已知这 6 名同学中有 4 名男生，2 名女生，现要从这 6 名同学中选出 5 人上岗，剩下 1 人留守值班．若两名女生都已经到岗，则她们不在同一岗位的概率为

A．$\frac{2}{15}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{8}{15}$　　D．$\frac{4}{5}$

7. 设 $\min\{m,n\}$ 表示 m，n 中的较小数．若函数 $f(x)=\min\{|x|-1,2x^2-ax+a+6\}$ 至少有 3 个零点，则实数 a 的取值范围是

A．$[12,+\infty)$　　B．$(-\infty,-4]\cup(12,+\infty)$

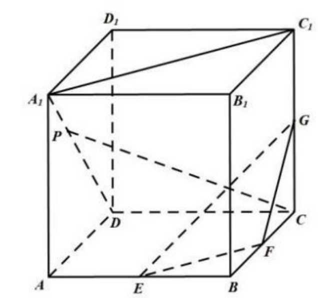
C．$(-\infty,-4)\cup[12,+\infty)$　　D．$(-\infty,-4)$

8. 现有一个底面边长为 $2\sqrt{3}$，侧棱长为 $2\sqrt{2}$ 的正三棱锥框架，其各顶点都在球 O_1 的球面上．将一个圆气球 O_2 放在此框架内，再向气球内充气，当圆气球恰好与此正三棱锥各棱都相切时停止充气，此时两球表面积之和为

A．23π　　B．$(60-16\sqrt{6})\pi$　　C．$(60+16\sqrt{6})\pi$　　D．$(22-2\sqrt{5})\pi$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G 分别为 AB，BC，CC_1 的中点，点 P 在线段 A_1D 上，则下列结论正确的是



A．直线 A_1C_1 // 平面 EFG

B．直线 CP 和平面 $ABCD$ 所成的角为定值

C．异面直线 CP 和 FG 所成的角不为定值

D．若直线 CP // 平面 EFG，则点 P 为线段 A_1D 的中点

10. 已知 $a>1$，$b>1$，$\frac{a}{a-1}=2^a$，$\frac{b}{b-1}=\log_2 b$，则以下结论正确的是

A．$a+2^a=b+\log_2 b$　　B．$\frac{1}{2^a}+\frac{1}{\log_2 b}=1$

C．$a-b<-2$　　D．$a+b>4$

11. 双曲线具有如下光学性质：从双曲线的一个焦点发出的光线，经双曲线反射后，反射光线的反向延长线经过双曲线的另一个焦点．由此可得，过双曲线上任意一点的切线平分该点与两焦点连线的夹角．已知 F_1,F_2 分别为双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 的左，右焦点，过 C 右支上一点 $A(x_0,y_0)$ $(x_0>1)$ 作直线 l 交 x 轴于点 $M\left(\frac{1}{x_0},0\right)$，交 y 轴于点 N，则

A．C 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$

B．$\angle F_1AM=\angle F_2AM$

C．过点 F_1 作 $F_1H\perp AM$，垂足为 H，则 $|OH|=\frac{3}{2}$

D．四边形 AF_1NF_2 面积的最小值为 $4\sqrt{5}$

12．已知函数 $f_n(x)=\sin^{2n}x+\cos^{2n}x(n\in\mathbf{N}^*)$，记 $f_n(x)$ 的最小值为 a_n，下列说法正确的是

A．对任意的正整数 n，$f_n(x)$ 的图象都关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称

B．$a_1+a_2+a_3=\dfrac{7}{8}$

C．$\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+a_i)<2$

D．设 $b_n=\sqrt{n}\cdot a_n$，S_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_n<2\sqrt{2}-4b_{n+2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．某工厂生产一批零件（单位：cm），其尺寸 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且 $P(\xi\leqslant 14)=0.1$，$P(\xi<18)=0.9$，则 $\mu=$________.

14．已知直线 $y=kx$ 与圆 $C:x^2+y^2-4x+3=0$ 相交于 A、B 两点．若 ΔABC 为直角三角形，则 k 的值为________.

15．已知函数 $f(x)=|\ln x|$，直线 l_1，l_2 是 $f(x)$ 的两条切线，l_1，l_2 相交于点 Q，若 $l_1\perp l_2$，则 Q 点横坐标的取值范围是________.

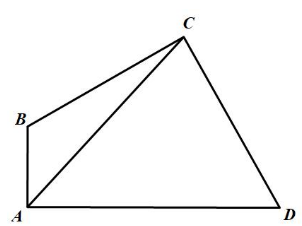
16．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，A,B 是椭圆 C 上的两点，且直线 OA,OB 的斜率满足 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-\dfrac{1}{4}$，延长 OA 到点 M，使得 $|OM|=3|OA|$，且直线 MB 交椭圆 C 于 N 点，设 $\overline{ON}=\lambda\overline{OA}+\mu\overline{OB}$，则 $\lambda^2+\mu^2=$________；$\dfrac{|MN|}{|BN|}=$________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$\angle ABC=\dfrac{2}{3}\pi$，$AB=1$．

（1）若 $AC=\sqrt{7}$，求 ΔABC 的面积；

（2）若 $\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，$CD=2\sqrt{3}$，求 $\tan\angle CAD$．



18．（12 分）已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_n^2+2a_n-n=2S_n$．

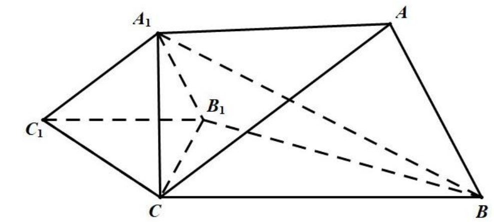
（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=3^{a_n}-1$，若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\dfrac{b_n+1}{b_n\cdot b_{n+1}}$，求证：$c_1+c_2+\cdots+c_n<\dfrac{1}{4}$．

19．（12 分）如图，在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，$A_1C\perp$ 平面 BB_1C_1C．

（1）证明：平面 $A_1B_1C\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$；

（2）若 $A_1C=B_1C$，$A_1B_1=B_1C_1=2\sqrt{2}$，$AB=BC=4\sqrt{2}$，求平面 AA_1B 与平面 CA_1B 夹角的余弦值．



20．（12 分）2023 年中央一号文件指出，民族要复兴，乡村必振兴．为助力乡村振兴，某电商平台准备为某地的农副特色产品开设直播带货专场．直播前，此平台用不同的单价试销，并在购买的顾客中进行体验调查问卷．为了回馈 100 名热心参与问卷的顾客，此平台决定在直播中专门为他们设置两次抽奖活动，每次抽奖都是由系统独立、随机地从这 100 名顾客中抽取 20 名顾客，抽中顾客会有礼品赠送，若直播时这 100 名顾客都在线，记两次抽中的顾客总人数为 X（不重复计数）．

（1）若甲是这 100 名顾客中的一人，求甲被抽中的概率；

（2）求使 $P(X=k)$ 取得最大值的整数 k．

21．（12 分）已知动圆过点 $F(0,1)$，且与直线 $l:y=-1$ 相切，设动圆圆心 D 的轨迹为曲线 C．

（1）求曲线 C 的方程；

（2）过 l 上一点 P 作曲线 C 的两条切线 PA，PB，A，B 为切点，PA，PB 与 x 轴分别交于 M，N 两点．记 $\Delta AFM,\Delta PMN,\Delta BFN$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3．

（i）证明：四边形 $FNPM$ 为平行四边形；

（ii）求 $\dfrac{S_2^2}{S_1S_3}$ 的值．

22．（12 分）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x-1$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ax-\dfrac{1}{2}$，其中 $a>0$，e 是自然对数的底数．

（1）若 $f(x)\geqslant g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围；

（2）设 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，在（1）的条件下，讨论关于 x 的方程 $h(f(x))=h(g(x))$ 在 $(0,+\infty)$ 上解的个数．