鄂东南省级示范高中教育教学改革联盟学校 2023 年五月模拟考

高三数学参考答案

选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	D	C	A	D	A	B	AD	ABD	ABD	ACD

填空题

13．16　　14．$\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$　　15．$(0,1)$　　16．1；4

小题详解

1．C【解析】$\because A=\{x\mid x^2-2x-3<0\}=\{x\mid -1<x<3\}$，$B=\{x\mid y=\ln(x+1)\}=\{x\mid x>-1\}$，

$\therefore \complement_U A=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3\}$，$\complement_U B=\{x\mid x\leqslant -1\}$，$\therefore A\not\subseteq \complement_U B$，$\complement_U A\not\subseteq B$，$A\cup B\neq U$，$(\complement_U A)\cup B=U$，

故选 C.

2．B【解析】已知 $2-\mathrm{i}$（i 是虚数单位）是关于 x 的方程 $x^2+bx+c=0(b,c\in\mathbf{R})$ 的一个根，

则 $(2-\mathrm{i})^2+b(2-\mathrm{i})+c=0$，即 $4-4\mathrm{i}-1+2b-b\mathrm{i}+c=0$，即 $\begin{cases}3+2b+c=0\\-4-b=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=-4\\c=5\end{cases}$，

故 $b+c=1$，故选 B.

3．D【解析】$\because |\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，且 $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{10}$，

$\therefore |\vec{a}-2\vec{b}|^2=\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=10$，即 $4-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4=10$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore \vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为 $|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=|\vec{b}|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=-\frac{1}{8}\vec{a}$，故选 D.

4．C【解析】函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得 $g(x)=\sin(2x+\frac{2\pi}{3}+\varphi)$ 的图象，

又函数 $g(x)$ 是偶函数，$\therefore \frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore \varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$；$\therefore \tan\varphi=\tan(k\pi-\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故选 C.

5．A【解析】在 $\triangle AMB$ 中，由勾股定理可得：$AB=\sqrt{AM^2+BM^2}=\sqrt{800^2+600^2}=1000$ 米，连接 PO，

则在 $\triangle APO$ 中，$PO=AP\cdot\sin 42^\circ\approx 670$ 米，连接 OB，OC，OM，则在 $\triangle OBM$ 中，

$\sin\angle BOM=\frac{BM}{BO}=\frac{600}{670}=\frac{60}{67}$，故 $\angle BOM\approx 1.1$，$\angle BOC\approx 2.2$，则彩虹（$\overset{\frown}{BPC}$）的长度约为 $(2\pi-2.2)\times 670=1340\pi-1474$，故选 A.

6．D【解析】法一：设“两名女生都到岗”为事件 A，“两名女生不在同一岗位”为事件 B，则

$P(A)=\frac{C_2^2C_4^3C_5^1C_4^2C_2^2}{C_6^5C_5^1C_4^2C_2^2}=\frac{4\times5\times6}{6\times5\times6}=\frac{2}{3}$，$P(AB)=\frac{C_2^2C_4^3(C_5^1C_4^2C_2^2-C_2^1C_3^1)}{C_6^5C_5^1C_4^2C_2^2}=\frac{4\times24}{6\times5\times6}=\frac{8}{15}$，

$\therefore P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{8}{15}\times\frac{3}{2}=\frac{4}{5}$，故选 D.

法二：$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{C_2^2C_4^3(C_5^1C_4^2C_2^2-C_2^1C_3^1)}{C_2^2C_4^3C_5^1C_4^2C_2^2}=\frac{C_5^1C_4^2C_2^2-C_2^1C_3^1}{C_5^1C_4^2C_2^2}=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$.

7．A【解析】由题意可得 $g(x)=2x^2-ax+a+6=0$ 有解，所以 $\Delta=a^2-8(a+6)\geqslant 0$，

解得 $a\leqslant -4$ 或 $a\geqslant 12$，

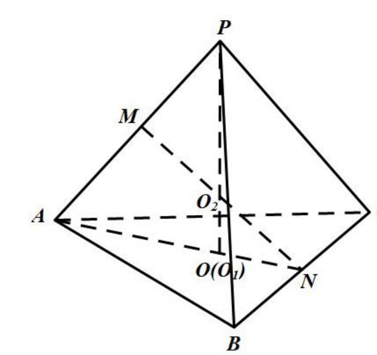
当 $a\geqslant 12$ 时，必有 $\begin{cases}\frac{a}{4}>1\\g(1)=2-a+a+6\geqslant 0\end{cases}$，解得 $a\geqslant 12$；

当 $a\leqslant -4$ 时，必有 $\begin{cases}\frac{a}{4}<-1\\g(-1)=2a+8\geqslant 0\end{cases}$，不等式组无解，

综上所述，$a\geqslant 12$，$\therefore a$ 的取值范围为 $[12,+\infty)$，故选 A.

8．B【解析】设此正三棱锥框架为 $P-ABC$，球 O_1 的半径为 R，球 O_2 的半径为 r，底面 ABC 外接圆的圆心为 O，连接 PO，AO，延长 AO 交 BC 于点 N．$\because$ 圆气球 O_2 在此框架内且与正三棱锥所有的棱都相切，设球 O_2 与棱 PA 和 BC 相切于点 M，N，则 $AO=\frac{\sqrt{3}}{3}\times2\sqrt{3}=2$，$ON=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}-2=1$，

$\because PO\perp$ 底面 ABC，$\therefore PO\perp AO$，又 $\because PA=2\sqrt{2}$，$\therefore PO=\sqrt{8-4}=2$，



在直角三角形 OO_2N 中，$OO_2=\sqrt{r^2-1}$，$1<r<2\sqrt{2}$，

在直角三角形 PMO_2 中，$PM=MO_2=r$，$PO_2=\sqrt{2}r$，

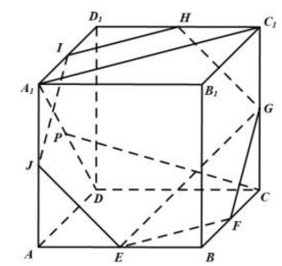
由 $PO=PO_2+OO_2$，可得 $2=\sqrt{2}r+\sqrt{r^2-1}$，解得 $r=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$，

则球 O_2 的表面积为 $4\pi r^2=4\pi\times(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=(44-16\sqrt{6})\pi$，

又 $OA=OB=OC=OP=2$，则 O 与 O_1 重合，球 O_1 的半径 $R=2$，球 O_1 的表面积为

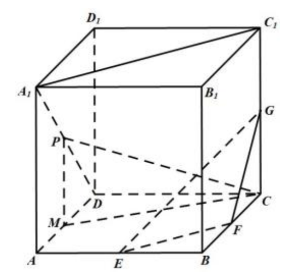
$4\pi R^2=4\pi\times2^2=16\pi$，综上可得：两球表面积之和为$(44-16\sqrt{6})\pi+16\pi=(60-16\sqrt{6})\pi$，故选 B.

9．AD【解析】对于 A 选项，平面EFG截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的截面图形为正六边形$EFGHIJ$，其中H,I,J分别为C_1D_1，A_1D_1，AA_1的中点，$\because A_1C_1//HI$，



$HI\subset$平面$EFGHIJ$，$A_1C_1\not\subset$平面$EFGHIJ$，$\therefore A_1C_1//$平面$EFGHIJ$，故 A 正确；

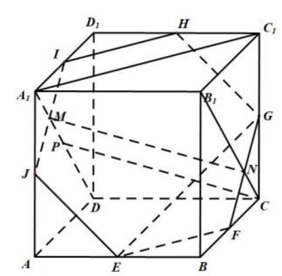
对于 B 选项，过P作$PM\perp AD$交AD于点M，则直线CP和平面$ABCD$所成的角为$\angle PCM$，$\tan\angle PCM=\dfrac{PM}{CM}$，设$PM=x$，正方体的棱长为 1，



则$\tan\angle PCM=\dfrac{PM}{CM}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2+1}}$，（0≤$x$≤1），

$\therefore\tan\angle PCM\in\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$，$\therefore$直线$CP$和平面$ABCD$所成的角不为定值，故 B 错误；

对于 C 选项，$\because BC_1\perp$平面A_1B_1CD，$BC_1//FG$，$\therefore FG\perp$平面A_1B_1CD，



又$CP\subset$平面A_1B_1CD，$\therefore CP\perp FG$，故 C 错误；

对于 D 选项，设$IJ\cap A_1D=M$，$FG\cap B_1C=N$，则平面$A_1B_1CD\cap$平面$EFGHIJ=MN$，$\because CP//$平面EFG，$CP\subset$平面A_1B_1CD，$\therefore CP//MN$，又在平面A_1B_1CD内，易知$A_1M=\dfrac{1}{4}A_1D$，$CN=\dfrac{1}{4}CB_1$，$\therefore$点P为线段A_1D的中点，故 D 正确，故选 AD.

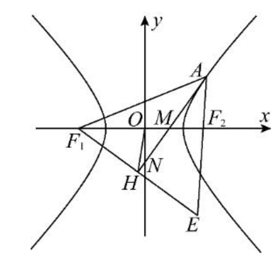
10．ABD【解析】对于 A 选项，由题意知，a,b是函数$h(x)=\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$分别与函数$f(x)=2^x$，$g(x)=\log_2 x$图象交点的横坐标，$\because f(x)$，$g(x)$两个函数的图象关于直线$y=x$对称，$h(x)$的图象也关于$y=x$对称，故两交点$(a,2^a)$，$(b,\log_2 b)$关于直线$y=x$对称，所以$a=\log_2 b$，$b=2^a$，故 A 正确；对于 B 选项，由$\dfrac{a}{a-1}=2^a=b$可得$ab=a+b$即$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$，故 B 正确；对于 D 选项，

$\because a+b=(a+b)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})=2+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}>4$，故 D 正确；对于 C 选项，$a-b=\log_2 b-b(2<b<4)$，令

$\varphi(b)=\log_2 b-b$，则$\varphi'(b)=\dfrac{1}{b\ln 2}-1<0$，$\therefore\varphi(b)=\log_2 b-b$在$(2,4)$上单调递减，则$\varphi(b)>\log_2 4-4=-2$，故 C 错误，故选 ABD.

11．ABD【解析】对于 A 选项，由已知可得$a=1,b=2$，$\therefore C$的渐近线方程为$y=\pm2x$，故 A 正确；对于 B 选项，由题意得，AM的直线方程为：$x_0x-\dfrac{y_0y}{4}=1$，$\therefore AM$为双曲线的切线，由双曲线的光学性质可知，AM平分$\angle F_1AF_2$，故 B 正确；对于 C 选项，延长F_1H，与AF_2的延长线交于点E，则AH垂直平分F_1E，即点H为F_1E的中点．又O是F_1F_2的中点，

$\therefore|OH|=\dfrac{1}{2}|F_2E|=\dfrac{1}{2}\left(|AE|-|AF_2|\right)=\dfrac{1}{2}\left(|AF_1|-|AF_2|\right)=a=1$，故 C 错误；



对于 D 选项，

$S_{AF_1NF_2}=S_{\triangle AF_1F_2}+S_{\triangle NF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\times|F_1F_2|\times\left(|y_0|+\dfrac{4}{|y_0|}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{|y_0|\cdot\dfrac{4}{|y_0|}}=4\sqrt{5}$，

当且仅当$|y_0|=\dfrac{4}{|y_0|}$，即$y_0=\pm2$时，等号成立．$\therefore$四边形AF_1NF_2面积的最小值为$4\sqrt{5}$，故 D 正确，故选 ABD.

12．ACD【解析】对于 A 选项，$\because f_n(\dfrac{\pi}{2}-x)=\sin^{2n}(\dfrac{\pi}{2}-x)+\cos^{2n}(\dfrac{\pi}{2}-x)=\cos^{2n}x+\sin^{2n}x=f_n(x)$，故 A 正确；对于 B 选项，当$n=1$时，$f_1(x)=1$．当$n>1$时，设$\sin^2x=t$，则$\cos^2x=1-t$，令

$h(t)=t^n+(1-t)^n,t\in[0,1]$，$h'(t)=nt^{n-1}-n(1-t)^{n-1}=n\left[t^{n-1}-(1-t)^{n-1}\right]$，$0<t<\dfrac{1}{2}$时，$0<t<1-t<1$，

$\therefore t^{n-1}<(1-t)^{n-1}$，$\therefore h'(t)<0$，$\dfrac{1}{2}<t<1$时，$h'(t)>0$，$\therefore h(t)_{\min}=h(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，即$a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，

$\therefore a_1+a_2+a_3=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$，故 B 错误；对于 C 选项，由$\ln(x+1)\leqslant x$得$\ln(1+a_i)<a_i$，

$\therefore\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+a_i)<\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}<2$，故 C 正确；

对于 D 选项，$\because\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$，$\therefore 2\sqrt{n+1}>\sqrt{n}+\sqrt{n+2}$，

$\therefore\dfrac{2\sqrt{n+1}}{2^{n-1}}>\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}{2^{n-1}}$，$\therefore\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}<\dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n-2}}-\dfrac{\sqrt{n+2}}{2^{n-1}}$，又$b_n=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$，

$\therefore S_n=\dfrac{\sqrt{1}}{2^{1-1}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2^{2-1}}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}<\dfrac{\sqrt{2}}{2^{1-2}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2^{1-1}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2^0}-\dfrac{\sqrt{4}}{2}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n-2}}-\dfrac{\sqrt{n+2}}{2^{n-1}}=2\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{n+2}}{2^{n-1}}$

$=2\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{n+2}}{2^{n+1}}=2\sqrt{2}-4b_{n+2}$，即有 $S_n<2\sqrt{2}-4b_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，故 D 正确，故选 ACD．

13．16【解析】$\because \xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，$P(\xi\leqslant 14)+P(\xi<18)=0.1+0.9=1$，

$\therefore P(\xi\leqslant 14)=1-P(\xi<18)=P(\xi\geqslant 18)$，$\therefore \mu=\frac{14+18}{2}=16$．

14．$\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$【解析】根据题意，圆 $C:x^2+y^2-4x+3=0$ 即 $(x-2)^2+y^2=1$，若 ΔABC 为直角三角形，

则有 $\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得：$k=\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$．

15．$(0,1)$【解析】记 $g(x)=-\ln x(0<x<1)$，$h(x)=\ln x(x\geqslant 1)$，

由函数 $f(x)$ 图象可知，不妨设 l_1 与 $g(x)$ 相切于点 $A(x_1,-\ln x_1)$，l_2 与 $h(x)=\ln x$ 相切于点 $B(x_2,\ln x_2)$，

则 $0<x_1<1,x_2>1$．$\because g'(x)=-\frac{1}{x}$，$h'(x)=\frac{1}{x}$，$\therefore k_{l_1}=-\frac{1}{x_1}$，$k_{l_2}=\frac{1}{x_2}$，

$\because l_1\perp l_2$，$\therefore -\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=-1$，即 $x_1x_2=1$，　$\because l_1$ 的方程为：$y+\ln x_1=-\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，

l_2 的方程为：$y-\ln x_2=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$，联立方程组可求得点 Q 的横坐标 $x_Q=\frac{2}{x_1+x_2}$，

$\because x_1x_2=1$，$\therefore x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}=2$，$\therefore 0<x_Q<1$，即 Q 点横坐标的取值范围是 $(0,1)$．

16．1；4【解析】设 $N(x,y)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\because k_{OA}\cdot k_{OB}=-\frac{1}{4}$，$\therefore \frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-\frac{1}{4}$，$\therefore x_1x_2+4y_1y_2=0$，

$\because \overline{ON}=\lambda\overline{OA}+\mu\overline{OB}$，$\therefore (x,y)=\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)$，$\therefore \begin{cases}x=\lambda x_1+\mu x_2\\ y=\lambda y_1+\mu y_2\end{cases}$，

$\because N(x,y)$ 在椭圆上，$\therefore (\lambda x_1+\mu x_2)^2+4(\lambda y_1+\mu y_2)^2=4$．

即 $\lambda^2(x_1^2+4y_1^2)+\mu^2(x_2^2+4y_2^2)+2\lambda\mu(x_1x_2+4y_1y_2)=4$．①

又 $x_1^2+4y_1^2=4$，$x_2^2+4y_2^2=4$，代入①得 $\lambda^2+\mu^2=1$．

$\because \overline{ON}=\lambda\overline{OA}+\mu\overline{OB}=\frac{\lambda}{3}\overline{OM}+\mu\overline{OB}$，由 M,N,B 三点共线，得 $\frac{\lambda}{3}+\mu=1$，$\therefore \lambda=\frac{3}{5}$，$\mu=\frac{4}{5}$，

$\therefore \overline{ON}=\frac{1}{5}\overline{OM}+\frac{4}{5}\overline{OB}$，$\therefore \frac{1}{5}\overline{MN}=\frac{4}{5}\overline{NB}$，$\therefore \frac{|MN|}{|BN|}=4$．

解答题

17．（10 分）

【答案】（1）$\frac{\sqrt{3}}{2}$；（2）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】（1）在 ΔABC 中，由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2\times AB\times BC\times\cos\angle ABC$，

$\therefore 7=1+BC^2+BC$，解得 $BC=2$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times BC\times\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\times 1\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．　…………5 分

（2）设 $\angle CAD=\theta$，

在 ΔACD 中，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}$，$\therefore \frac{AC}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\theta}$ ①，　…………6 分

在 ΔABC 中，$\angle BAC=\frac{\pi}{2}-\theta$，$\angle BCA=\theta-\frac{\pi}{6}$，

则 $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle BCA}$，即 $\frac{AC}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{\sin(\theta-\frac{\pi}{6})}$ ②，　…………8 分

由①②得：$2\sqrt{3}\sin(\theta-\frac{\pi}{6})=\sin\theta,\therefore 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta)=\sin\theta$，

整理得 $2\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta$，$\therefore \tan\angle CAD=\frac{\sqrt{3}}{2}$．　…………10 分

18．（12 分）

【答案】（1）$a_n=n$；（2）证明见解析

【解析】（1）$\because a_n^2+2a_n-n=2S_n$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n-1}^2+2a_{n-1}-(n-1)=2S_{n-1}$，

两式相减得：$a_n^2+2a_n-a_{n-1}^2-2a_{n-1}-1=2a_n$，整理得 $a_n^2=(a_{n-1}+1)^2$，　…………4 分

$\because a_n>0$，$\therefore a_n=a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$，当 $n=1$ 时，$a_1^2+2a_1-1=2a_1$，

$\therefore a_1=-1$（舍）或 $a_1=1$，　…………5 分

$\therefore \{a_n\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，则 $a_n=n$；　…………6 分

（2）由（1）知，$b_n=3^n-1$，$c_n=\frac{3^n}{(3^n-1)\cdot(3^{n+1}-1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1})$　…………8 分

$\therefore c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{3^1-1}-\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{3^2-1}-\frac{1}{3^3-1}+\cdots+\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1})$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{n+1}-1})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(3^{n+1}-1)}$，

$\because \frac{1}{2(3^{n+1}-1)}>0$，$\therefore \frac{1}{4}-\frac{1}{2(3^{n+1}-1)}<\frac{1}{4}$，即 $c_1+c_2+\cdots+c_n<\frac{1}{4}$．………………12 分

19．（12 分）

【答案】（1）证明见解析；（2）$\frac{2\sqrt{34}}{17}$

【解析】（1）证明：$\because A_1C\perp$ 平面 BB_1C_1C，$B_1C_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，$\therefore A_1C\perp B_1C_1$；

又 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$\therefore \angle A_1B_1C_1=\frac{\pi}{2}$，即 $B_1C_1\perp B_1A_1$，………………2 分

$\because A_1C\perp B_1C_1$，$B_1C_1\perp B_1A_1$，$A_1C\cap B_1A_1=A_1$，$A_1C,B_1A_1\subset$ 平面 A_1B_1C，

$\therefore B_1C_1\perp$ 平面 A_1B_1C，………………4 分

又 $B_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，$\therefore$ 平面 $A_1B_1C\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$；………………5 分

（2）$\because A_1C\perp$ 平面 BB_1C_1C，$B_1C\subset$ 平面 BB_1C_1C，$\therefore A_1C\perp B_1C$；

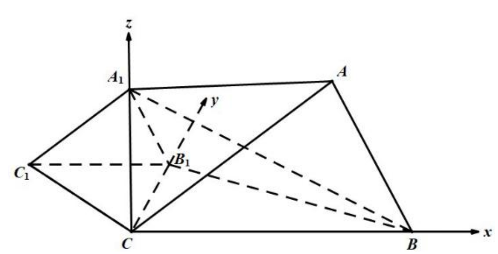
又 $B_1C_1\perp$ 平面 A_1B_1C，$B_1C_1//BC$，$\therefore BC\perp$ 平面 A_1B_1C，$\because B_1C\subset$ 平面 A_1B_1C，$\therefore BC\perp B_1C$，

$\because A_1C\perp B_1C$，$BC\perp B_1C$，$A_1C\cap BC=C$，$A_1C,BC\subset$ 平面 A_1BC，

$\therefore B_1C\perp$ 平面 A_1BC，………………6 分

法一：（坐标法）

分别以 $\overrightarrow{CB}$ 为 x 轴，$\overrightarrow{CB_1}$ 为 y 轴，$\overrightarrow{CA_1}$ 为 z 轴建立如图所示平面直角坐标系，



则 $A_1(0,0,2)$，$B(4\sqrt{2},0,0)$，$C(0,0,0)$，$B_1(0,2,0)$，

$\overrightarrow{A_1B}=(4\sqrt{2},0,-2)$，$\overrightarrow{B_1B}=(4\sqrt{2},-2,0)$，………………7 分

设平面 AA_1B 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，$\because B_1B\subset$ 平面 AA_1B，

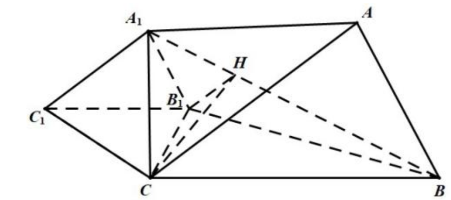
则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{B_1B}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}4\sqrt{2}x-2z=0\\ 4\sqrt{2}x-2y=0\end{cases}$，取 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{2},4,4)$，………………9 分

取平面 CA_1B 的一个法向量 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,0)$，………………10 分

则 $\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{4}{\sqrt{34}\cdot 1}=\frac{4\sqrt{34}}{34}=\frac{2\sqrt{34}}{17}$，

故平面 AA_1B 与平面 CA_1B 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{34}}{17}$．………………12 分

法二：（几何法）



在平面 A_1BC 内，过点 C 作 $CH\perp A_1B$ 交 A_1B 于点 H，

连接 B_1H，则 $A_1B\perp$ 平面 B_1CH，$\angle B_1HC$ 为二面角 B_1-A_1B-C 的平面角，

即为平面 AA_1B 与平面 CA_1B 的夹角．………………8 分

$\because A_1C=B_1C$，$A_1B_1=B_1C_1=2\sqrt{2}$，$AB=BC=4\sqrt{2}$，$\therefore A_1C=B_1C=2$，

又在直角三角形 A_1BC 中，$A_1B=\sqrt{A_1C^2+BC^2}=\sqrt{4+32}=6$，$\therefore CH=\frac{A_1C\cdot BC}{A_1B}=\frac{2\cdot 4\sqrt{2}}{6}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，

则在直角三角形 B_1CH 中，$\tan\angle B_1HC=\frac{B_1C}{CH}=\frac{2}{\frac{4\sqrt{2}}{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，故 $\cos\angle B_1HC=\frac{4}{\sqrt{34}}=\frac{2\sqrt{34}}{17}$，

$\therefore$ 平面 AA_1B 与平面 CA_1B 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{34}}{17}$．………………12 分

20．（12 分）

【答案】（1）$\frac{9}{25}$；（2）$k=36$

【解析】（1）设事件 A：“顾客甲第一次抽中”，事件 B：“顾客甲第二次抽中”，

$\because A$ 与 B 是相互独立事件，所以 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立，

由于 $P(A)=P(B)=\frac{C_{99}^{19}}{C_{100}^{20}}=\frac{\frac{99!}{19!80!}}{\frac{100!}{20!80!}}=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$，故 $P(\overline{A})=P(\overline{B})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$，

$\therefore$ 甲被抽中的概率 $P=1-(\frac{4}{5})^2=\frac{9}{25}$；………………4 分

（2）“由系统独立、随机地从这 100 名顾客中抽取 20 名顾客，抽取两次”所包含的基本事件总数

为$(C_{100}^{20})^2$，当$X=k$时，两次都中奖的人数为$40-k$，只在第一次中奖的顾客人数为$k-20$，只在第二次中奖的顾客人数也为$k-20$，

由乘法原理知：事件$\{X=k\}$所包含的基本事件数为$C_{100}^{20}C_{20}^{40-k}C_{80}^{k-20}=C_{100}^{20}C_{20}^{k-20}C_{80}^{k-20}$，

$P(X=k)=\dfrac{C_{100}^{20}C_{20}^{40-k}C_{80}^{k-20}}{(C_{100}^{20})^2}=\dfrac{C_{20}^{k-20}C_{80}^{k-20}}{C_{100}^{20}}$，$20\leqslant k\leqslant 40$，…………………6 分

由$\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k+1)\\P(X=k)\geqslant P(X=k-1)\end{cases}$可得：$\begin{cases}C_{20}^{k-20}C_{80}^{k-20}\geqslant C_{20}^{k-19}C_{80}^{k-19}\\C_{20}^{k-20}C_{80}^{k-20}\geqslant C_{20}^{k-21}C_{80}^{k-21}\end{cases}$，…………………8 分

整理得：$\begin{cases}\dfrac{20!}{(k-20)!(40-k)!}\cdot\dfrac{80!}{(k-20)!(100-k)!}\geqslant\dfrac{20!}{(k-19)!(39-k)!}\cdot\dfrac{80!}{(k-19)!(99-k)!}\\\dfrac{20!}{(k-20)!(40-k)!}\cdot\dfrac{80!}{(k-20)!(100-k)!}\geqslant\dfrac{20!}{(k-21)!(41-k)!}\cdot\dfrac{80!}{(k-21)!(101-k)!}\end{cases}$，

化简得：$\begin{cases}\dfrac{1}{(40-k)(100-k)}\geqslant\dfrac{1}{(k-19)(k-19)}\\\dfrac{1}{(k-20)(k-20)}\geqslant\dfrac{1}{(41-k)(101-k)}\end{cases}$，则有$\begin{cases}(k-19)(k-19)\geqslant(40-k)(100-k)\\(41-k)(101-k)\geqslant(k-20)(k-20)\end{cases}$，

整理得$\begin{cases}102k\geqslant 3639\\102k\leqslant 3741\end{cases}$，解得$\dfrac{1213}{34}\leqslant k\leqslant\dfrac{1247}{34}$，即$35\dfrac{23}{34}\leqslant k\leqslant 36\dfrac{23}{34}$，…………………11 分

$\because k$为整数，$\therefore k=36$，$\therefore P(X=k)$取到最大值时，$k=36$．…………………12 分

21．（12 分）

【答案】（1）$x^2=4y$；（2）（i）证明见解析；（ii）1

【解析】（1）设圆心$D(x,y)$，由题意得：$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y+1|$，化简整理得：$x^2=4y$，

$\therefore$曲线C的方程为：$x^2=4y$．…………………4 分

（2）（i）证明：设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$\because y=\dfrac{x^2}{4}$，$\therefore y'=\dfrac{x}{2}$，

$\therefore$直线PA的方程为：$y=\dfrac{x_1}{2}(x-x_1)+y_1$，即$y=\dfrac{1}{2}x_1x-\dfrac{1}{4}x_1^2$，

同理可得直线PB的方程为：$y=\dfrac{1}{2}x_2x-\dfrac{1}{4}x_2^2$，

$\therefore M\left(\dfrac{x_1}{2},0\right)$，$N\left(\dfrac{x_2}{2},0\right)$，$P\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},-1\right)$，…………………6 分

又$F(0,1)$，$\therefore\overline{FM}+\overline{FN}=\left(\dfrac{x_1}{2},-1\right)+\left(\dfrac{x_2}{2},-1\right)=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},-2\right)=\overline{FP}$，

$\therefore$四边形$FNPM$为平行四边形；…………………8 分

（ii）$\because P$在直线PA，PB上，设$P(x_0,-1)$，由(i)得：$\begin{cases}x_1x_0=2(-1+y_1)\\x_2x_0=2(-1+y_2)\end{cases}$，

$\therefore$直线AB的方程为：$x_0x-2y+2=0$，$\therefore$直线AB过点$F(0,1)$，

$\because$四边形$FNPM$为平行四边形，$\therefore FM\ /\!/\ BP$，$FN\ /\!/\ AP$，

$\therefore\angle AMF=\angle MPN=\angle BNF$，$FN=PM$，$PN=MF$，$\dfrac{BN}{NP}=\dfrac{BF}{FA}=\dfrac{MP}{MA}$，

$\therefore MP\cdot NP=MA\cdot BN$，…………………10 分

$\because S_1=\dfrac{1}{2}|MA||MF|\sin\angle AMF$，$S_2=\dfrac{1}{2}|PM||PN|\sin\angle MPN$，$S_3=\dfrac{1}{2}|NB||NF|\sin\angle BNF$，

$\therefore\dfrac{S_2^2}{S_1S_3}=\dfrac{(|PM|\cdot|PN|)^2}{|MA|\cdot|MF|\cdot|NB|\cdot|NF|}=\dfrac{|PM|\cdot|PN|}{|MA|\cdot|NB|}=1$．…………………12 分

22．（12 分）

【答案】(1) $0<a\leqslant e$；(2) $0<a\leqslant e$时，关于x的方程$h(f(x))=h(g(x))$在$(0,+\infty)$上有唯一解．

【解析】（1）由题意，$e^x+x-1\geqslant\dfrac{1}{2}x^2+ax-\dfrac{1}{2}$，即$a\leqslant\dfrac{e^x-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}}{x}$，

令$\varphi(x)=\dfrac{e^x-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}}{x}$，$\varphi'(x)=\dfrac{(x-1)(e^x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})}{x^2}$，…………………2 分

由$e^x\geqslant x+1$知$e^x-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}>0$，

故当$0<x<1$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减，$x>1$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增，

所以$\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=e$，所以$0<a\leqslant e$．…………………4 分

（2）$h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，易求得$h(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减；

①当$a=e$时，$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ex-\dfrac{1}{2}$，且由（1）知$f(x)\geqslant g(x)$，$g'(x)=x+e>0$，$f'(x)=e^x+1>0$，

即$f(x)$，$g(x)$均单调递增；此时$f(1)=g(1)=e$，有$h(f(1))=h(g(1))$．

1°当$x\in(0,1)$时，$g(x)<f(x)<f(1)=e$，$h(x)$在$(0,e)$上单调递增，所以$h(f(x))>h(g(x))$；

2° 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>g(x)>g(1)=\mathrm{e}$，$h(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(f(x))<h(g(x))$；

所以 $a=\mathrm{e}$ 时，方程有唯一解. ………………… 7 分

②当 $0<a<\mathrm{e}$ 时，由（1）知 $f(x)>g(x)$，令 $f(x)=\mathrm{e}$ 得 $x=1$，

令 $g(x)=\mathrm{e}$ 得 $\frac{1}{2}x^2+ax-\frac{1}{2}=\mathrm{e}\Rightarrow x_0=\sqrt{a^2+2\mathrm{e}+1}-a>1$，

1° 当 $x\in(0,1]$ 时，$g(x)<f(x)\leqslant f(1)=\mathrm{e}$，则 $h(f(x))>h(g(x))$； ………………… 8 分

2° 当 $x\in(1,x_0)$ 时，$f(x)>\mathrm{e}>g(x)$，由复合函数单调性可知 $h(f(x))$ 单调递减，$h(g(x))$ 单调递增，

令 $m(x)=h(g(x))-h(f(x))$，则 $m(x)$ 单调递增，

又 $m(1)=h(g(1))-h(f(1))=h(a)-h(\mathrm{e})<0$，$m(x_0)=h(g(x_0))-h(f(x_0))=h(\mathrm{e})-h(f(x_0))>0$，

所以存在唯一的 $x\in(1,x_0)$，满足 $h(f(x))=h(g(x))$； ………………… 10 分

3° 当 $x\in[x_0,+\infty)$ 时，$f(x)>g(x)\geqslant g(x_0)=\mathrm{e}$，则 $h(f(x))<h(g(x))$；

所以 $0<a<\mathrm{e}$ 时，方程有唯一解. …………………11 分

综合①②可得：

当 $0<a\leqslant\mathrm{e}$ 时，关于 x 的方程 $h(f(x))=h(g(x))$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一解. …………………12 分

题号	题型	分值	考点（知识点）	能力点	难易度	试题来源
1	单选	5	集合的运算、集合的关系	数学运算	易	自创
2	单选	5	复数的概念与运算	数学运算	易	改编（学科网）
3	单选	5	平面向量的数量积、投影向量	数学运算	易	自创
4	单选	5	三角函数的图象与性质	数学运算	易	改编（学科网）
5	单选	5	空间几何体的结构	直观想象	易	改编（学科网）
6	单选	5	条件概率、计数原理	数学建模	中	自创
7	单选	5	分段函数的零点	数学运算	中	改编（学科网）
8	单选	5	球与几何体的切接	直观想象	中	改编（学科网）
9	多选	5	立体几何综合	直观想象	易	自创
10	多选	5	函数与方程、导数与不等式	数学抽象 数学运算	中	改编（学科网）
11	多选	5	双曲线的几何性质	数学运算	中	改编（学科网）
12	多选	5	导数与三角函数、导数与数列	逻辑推理 数学运算	难	改编（学科网）
13	填空	5	正态分布	数学运算	易	自创
14	填空	5	直线与圆的位置关系	数学运算	易	改编（学科网）
15	填空	5	导数的几何意义	数学运算	中	改编（学科网）
16	填空	5	直线与椭圆的位置关系、向量共线	逻辑推理 数据处理	难	自创
17	解答	10	解三角形、三角恒等变换	数学运算	易	改编（学科网）
18	解答	12	数列递推式、数列求和	数学运算	易	自创
19	解答	12	立体几何与空间向量	直观想象	中	改编（学科网）
20	解答	12	概率的性质、古典概型、计数原理	数学建模 数据处理	难	自创
21	解答	12	直线与抛物线综合	数学运算	中	自创
22	解答	12	导数与恒成立问题、导数与复合方程的根	逻辑推理 数学运算	难	自创