此卷只装订不密封

座位号

考场号

准考证号

姓名______

**绝密★启用前**

# 2023年普通高等学校招生全国统一考试适应性考试

# 数　学

本试卷共4页，22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

**★祝考试顺利★**

**注意事项：**

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1. 已知非空数集$A,B$，则$A\subseteq B$是$A\cap B=A$的（　）

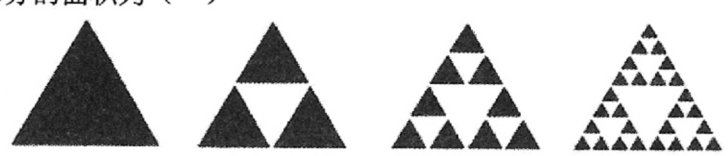
A. 充分不必要条件　　B. 充要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 复数$z=2i(1+i)$的虚部为（　）

A. 2　　B. $2i$　　C. $-2$　　D. $-2i$

3. 部分与整体以某种相似的方式呈现称为分形，一个数学意义上分形的生成是基于一个不断迭代的方程式，即一种基于递归的反馈系统，分形几何学不仅让人们感悟到科学与艺术的融合，数学与艺术审美的统一，而且还有其深刻的科学方法论意义，如图，由波兰数学家谢尔宾斯基1915年提出的谢尔宾斯基三角形就属于一种分形，具体作法是取一个实心三角形，沿三角形的三边中点连线.将它分成4个小三角形，去掉中间的那一个小三角形后，对其余3个小三角形重复上述过程逐次得到各个图形，若记图①三角形的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$，则第$n$个图中阴影部分的面积为（　）



图①　图②　图③　图④

A. $\frac{\sqrt{3}}{9}\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2})^{n+1}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot(\frac{3}{2})^{n}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{3}{4})^{n}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(\frac{3}{4})^{n}$



4. $(2x-\frac{1}{x^2})^6$的展开式中的常数项是（　）

A. $-250$　　B. $-240$　　C. 250　　D. 240

5. 数学家阿波罗尼斯证明过这样一个命题：平面内到两定点距离之比为常数$\lambda(\lambda>0$且$\lambda\neq1)$的点的轨迹是圆，后人将这个圆称为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆.已知在平面直角坐标系$xoy$中，$A(-2,0)$，动点$M$满足$|MA|=2|MO|$，得到动点$M$的轨迹是阿氏圆$C$.若对任意实数$k$，直线$l:y=k(x-1)+b$与圆$C$恒有公共点，则$b$的取值范围是（　）

A. $[-\frac{\sqrt{13}}{3},\frac{\sqrt{13}}{3}]$　　B. $[-\frac{\sqrt{14}}{3},\frac{\sqrt{14}}{3}]$

C. $[-\frac{\sqrt{15}}{3},\frac{\sqrt{15}}{3}]$　　D. $[-\frac{4}{3},\frac{4}{3}]$

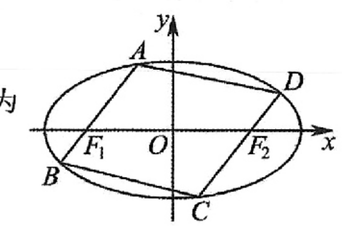
6. 一排有8个座位，有3人各不相邻而坐，则不同的坐法共有（　）

A. 120种　　B. 60种　　C. 40种　　D. 20种

7. 已知$\Delta ABC$的内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，记$\Delta ABC$的面积为$S$，若$c^2=6S$，则$\frac{a}{b}$的最小值为（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{13}-3}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{13}-3$

8. 已知焦点在$x$轴上的椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的内接平行四边形的一组对边分别经过其两个焦点（如图），当这个平行四边形为矩形时，其面积最大，则$b$的取值范围是（　）




A. $(0,2)$　　B. $(1,2)$

C. $[\sqrt{2},2)$　　D. $[1,2)$

**二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。**

9. 下列命题正确的有（　）

A. 空间中两两相交的三条直线一定共面

B. 已知不重合的两个平面$\alpha$，$\beta$，则存在直线$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，使得$a$，$b$为异面直线

C. 有两个平面平行，其他各个面都是平行四边形的多面体是棱柱

D. 过平面$\alpha$外一定点$P$，有且只有一个平面$\beta$与$\alpha$平行

10. 已知事件$A,B,C$，满足$P(A)=0.6$，$P(B)=0.2$，则下列结论正确的是（　）

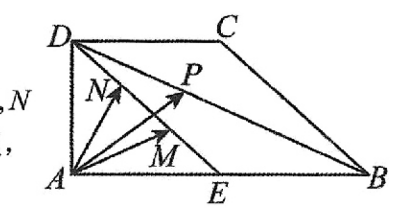
A. 如果$P(A\cup B\cup C)=1$，那么$P(C)=0.2$

B. 如果$A$与$B$相互独立，那么$P(\overline{A}\cdot\overline{B})=0.32$

C. 如果$A$与$B$互斥，那么$P(A\cup B)=0.8$

D. 如果$B\subseteq A$，那么$P(A\cup B)=0.6$，$P(B|A)=0.25$

11. 在直角梯形$ABCD$中，$AB\perp AD$，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，$E$为$AB$中点，$M,N$分别为线段$DE$的两个三等分点，点$P$为线段$BD$上任意一点，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{AN}$，则$\lambda+\mu$的值可能是（　）




A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

12．我们可以利用曲线和直线写出很多不等关系，如由 $y=\ln x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线 $y=x-1$ 写出不等式 $\ln x\le x-1$，进而用 $\frac{n+1}{n}$ 替换 $x$ 得到一系列不等式，叠加后有 $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ 这些不等式体现了数学之美．运用类似方法推导，下面的不等式正确的有（　）

A． $n!<e^{\frac{n(n-1)}{2}}$

B． $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<\ln n\ (n\ge 2)$

C． $(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\ldots(1+\frac{n}{n^2})<e^{\frac{3}{4}}$

D． $(\frac{1}{2})^2+(\frac{2}{3})^3+\ldots+(\frac{n}{n+1})^{n+1}<\frac{1}{e}$

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。**

13．已知随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P(X\le a)=P(X\ge b)$，则 $a^2+b^2$ 的最小值为________

14．已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=4$，$a_6=16$，若在数列 $\{a_n\}$ 每相邻两项之间插入三个数，使得新数列也是一个等差数列，则新数列的第43项为________

15．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 $F(2\sqrt{6},0)$，点 $A$ 坐标为 $(0,1)$，点 $P$ 为双曲线左支上的动点，且 $\Delta APF$ 的周长不小于18，则双曲线 $C$ 的离心率的取值范围为________

16．正四面体 $ABCD$ 的棱长为4，中心为点 $O$，则以 $O$ 为球心，1为半径的球面上任意一点 $P$ 与该正四面体各顶点间的距离的平方和：$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=$________

**四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

17．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_1-1}{a_1}\cdot\frac{a_2-1}{a_2}\cdots\frac{a_n-1}{a_n}=\frac{1}{a_n}$，

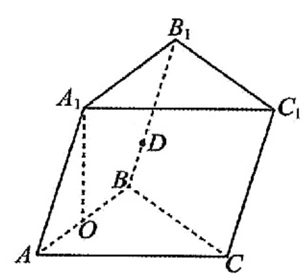
（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）令 $b_n=\frac{(a_n)^3}{3^{n+1}}$，求使 $b_n$ 取最大值时的 $n$ 的值.（取 $\sqrt[3]{3}=1.44$）

18．斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长都为4，$\angle A_1AB=60^\circ$，点 $A_1$ 在下底面 $ABC$ 的投影为 $AB$ 的中点 $O$．

（1）在棱 $BB_1$（含端点）上是否存在一点 $D$ 使 $A_1D\perp AC_1$？若存在，求出 $BD$ 的长;若不存在，请说明理由;

（2）求点 $A_1$ 到平面 $BCC_1B_1$ 的距离.




19．近年来，绿色环保和可持续设计受到社会的广泛关注，成为了一种日益普及的生活理念和方式。可持续和绿色能源，是我们这个时代的呼唤，也是我们每一个人的责任．某环保可持续性食用产品做到了真正的"零浪费"设计，其外包装材质是蜂蜡．食用完之后，蜂蜡罐可回收用于蜂房的再建造．为了研究蜜蜂进入不同颜色的蜂蜡罐与蜜蜂种类的关系，研究团队收集了黄、褐两种



颜色的蜂蜡罐，对 $M$，$N$ 两个品种的蜜蜂各60只进行研究，得到如下数据：

| | 黄色蜂蜡罐 | 褐色蜂蜡罐 |
|---|---|---|
| $M$ 品种蜜蜂 | 40 | 20 |
| $N$ 品种蜜蜂 | 50 | 10 |

（1）依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，分析蜜蜂进入不同颜色的蜂蜡罐是否与蜜蜂种类有关联？

（2）假设要计算某事件的概率 $P(B)$，常用的一个方法就是找一个与 $B$ 事件有关的事件 $A$，利用公式：$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$ 求解，现从装有 $a$ 只 $M$ 品种蜜蜂和 $b$ 只 $N$ 品种蜜蜂的蜂蜡罐中不放回地任意抽取两只，令第一次抽到 $M$ 品种蜜蜂为事件 $A$，第二次抽到 $M$ 品种蜜蜂为事件 $B$，求 $P(B)$（用 $a,b$ 表示 $P(B)$）.

附：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$．

临界值表：

| $\alpha$ | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_\alpha$ | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

20．设 $f(x)=5\sin\theta\cos x+(4\tan\theta-3)\sin x-5\sin\theta$（$\theta$为常数）为偶函数且 $f(x)$ 的最小值为 $-6$．

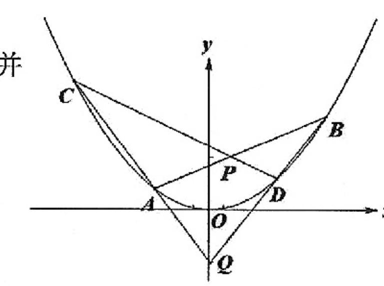
（1）求 $\sin\theta+\cos\theta$ 的值;

（2）设 $g(x)=\lambda f(\omega x)-f(\omega x+\frac{\pi}{2})$，$\lambda>0,\omega>0$，且 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称和点 $(\frac{2\pi}{3},3-3\lambda)$ 对称，若 $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{24}]$ 上单调递增，求 $\lambda$ 和 $\omega$ 的值.

21．过抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 内部一点 $P(m,n)$ 作任意两条直线 $AB,CD$，如图所示，连接 $AC$，$BD$ 延长交于点 $Q$，当 $P$ 为焦点并且 $AB\perp CD$ 时，四边形 $ACBD$ 面积的最小值为32

（1）求抛物线的方程;

（2）若点 $P(1,1)$，证明 $Q$ 在定直线上运动，并求出定直线方程.




22．已知函数 $f(x)=e^x[x^2-(a+2)x+a+3]$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性;

（2）若 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 有两个极值点 $x_1,x_2$，求证：$[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}]^2<4e^2$．